第一章 大学物理实验理论基础

第一节　物理学实验的目的和任务

物理学是自然科学中最基本同时也是最重要的学科之一。它是研究物质运动最基本和最普遍的规律，并将这些规律应用于生产实践的科学。在高等院校里，物理学是一门基础课程。通过这门课程的学习，学生能获得在今后实践和研究中所必需的物理学知识，同时通过实验教学掌握必需的实验技能，培养应用实验研究和解决问题的能力，培养严谨的科学作风，以便将来应用所学知识和技能去解决实践中的实际问题。

物理实验是物理学研究的基本方法，物理学规律的发现和理论的建立，都必须以严格的物理实验为基础。通过实验和观察，我们能够深入掌握物理现象的规律性，同时检验理论的正确性，使这门科学变得更为完整、严密。物理实验课的任务，不能简单地看作是重复某些物理现象和验证书本里某些物理定律，不能把实验课变成理论课的附属品。因为实验课有许多教学方面的要求是理论课所不能替代的，我们必须正确认识实验课的地位和作用。

物理学实验的目的和任务：

（1）通过实验观察和分析物理现象，巩固和加深对物理现象及规律的认识，提高理论学习的理解能力；

（2）学会正确使用常用物理仪器，熟悉仪器的性能；学会对基本物理量的测量，掌握物理实验的方法，提高实验技能水平；

（3）培养严肃认真、细致谨慎、实事求是的科学态度和遵守纪律的优良品德；

学好这门课程不仅要下功夫，还要掌握一定的学习方法。要做好每个实验，就必须认真做好预习、操作、报告这三个主要环节，下面就这三个环节的具体任务和要求加以说明。

1. 预习

预习是顺利进行实验的关键，因此实验前必须做好预习，要求做到：

（1）详细阅读有关实验内容，明确实验目的，理解实验原理，掌握实验方法；

（2）对实验仪器的性能和使用方法有初步认识，避免盲目操作，损坏仪器；

（3）根据实验要求，拟定好实验方案和步骤，设计好记录数据的表格。

2. 操作

通过实验操作，对物理现象进行观察和研究，掌握实验知识，加强对理论的理解，提

高实验技能，因此要求做到：

（1）遵守实验室规章制度；

（2）操作前要先认识并熟悉实验仪器，认真学习并了解仪器的性能和使用方法，能做到正确且规范操作；

（3）按照实验步骤有条不紊乱地进行操作；

（4）将测量数据认真地填写在预习时已准备好的记录表格中，计算出所要求的结果；

（5）实验完毕，整理好实验仪器，保持实验室的清洁卫生。

3. 报告

实验报告是实验的总结。要求同学们认真、细致地对实验数据进行整理和计算，在对结果加以分析总结的基础上，写出清楚且简明的实验报告。实验报告要求有以下几方面的内容：

（1）实验名称；

（2）实验目的；

（3）实验器材；

（4）简明的实验原理；

（5）实验内容与步骤；

（6）注意事项；

（7）实验数据表格（除实验数据还应记录实验时的环境条件，如室温、气压等）；

（8）实验数据处理（ 含不确定度的计算，或绘制曲线等）；

（9）实验结果评价及误差分析；

（10）思考与讨论：回答思考题，记录实验中的问题和感想。

第二节　学习物理实验数据处理方法的意义

物理实验的教学目标之一是培养实践能力和创新能力，这一目标是通过完成一定数量的实验项目来实现的。做物理实验离不开测量，在科学研究、工程技术、商贸结算、医疗卫生及日常生活等各个领域都离不开测量。测量的目的是为了获得测量结果，在一些重要的测量中，还要求对测量结果的质量（可信程度）给出定量的说明，因为测量结果的质量往往会影响国家和企业的经济利益。如出口货物时，对货物的称重，既不要多，也不能少，多了，会使货物白白流失，少了，可能会遭遇索赔；又如对人造地球卫星质量或火箭燃料质量的测量，若测量不准，就有可能导致卫星发射的失败；再如使用放射线治疗疾病，对放射线剂量的测量必须准确，剂量少了，达不到治疗疾病的目的而延误治疗，剂量多了，会对人体造成伤害。但是在实际工作中，测量误差是不可避免的，任一测量结果都必然带有误差。不同的应用场合，对误差的限值有不同的要求，因此在报告测量结果时，应该对这一测量结果可能包含的误差范围给出定量的说明，这就是测量结果及不确定度。在物理实验教学中，通过实验操作得到测量数据，通过数据处理得到测量结果及不确定度。因此，处理实验数据的能力，是科技人员及管理人员必备的实践能力之一。在校大学生学习一些物理实验数据处理的方法，是走向工作岗位或进一步学习必备的技能。

第三节 测量的基本术语及其解释

1. 测量

为获得被测物理量的量值而实施的一组操作，称为测量。这个定义中所说的“一组操作”，是实验的全过程，既包括实验操作，也包括数据处理，直到得出测量结果。

2. 测量结果

由测量所得到的赋予被测物理量的值，称为测量结果。这里的“赋予”二字，指明了测量结果不是“真值”，而只是真值的一个估计。对于直接测量来说，如果只做了单次测量，则观测值可作为测量结果；如果对同一物理量做了多次重复性测量，得到多个观测值，它们的算术平均值才是测量结果。

3. 实验标准差

实验标准差是表征测量结果分散性的量。

对同一物理量重复测量 n 次，得到一列数据 x_1，x_2，…，x_n，这一列数据也叫测量列。由于随机效应的影响，这些测量值各不相同，当 $n\to\infty$ 时，这个测量列的算术平均值

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{n\to\infty} x_i \tag{1-1}$$

称为总体均值；而

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\limits_{n\to\infty}(x_i-\mu)^2}{n}} \tag{1-2}$$

称为总体标准差。在实际工作中，$n\to\infty$ 是做不到的，因此 μ 和 σ 只在理论上存在，所以有时 μ 称为理论平均值，σ 称为理论标准差。在实验操作时，n 只能取有限值。当 n 有限时，x_i 的算术平均值

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1-3}$$

称为样本均值，可作为 μ 的最佳估计值。而理论标准差 σ 的估计值由贝塞尔公式给出：

$$S(x_i) = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{1-4}$$

称为测量值的实验标准差，有时也称样本标准差，“样本”二字是指在无限多个测量值中取有限个测量值。实验标准差 $S(x_i)$ 是表示测量结果分散性的量，$S(x_i)$ 值越大，表明测量结果的分散性越大；$S(x_i)$ 值越小，表明测量结果的分散性越小。当取样较少，即 n 较小时，$S(x_i)$ 值不稳定；当 n 增大时，$S(x_i)$ 值趋于一个稳定的值。

4. 测量不确定度

测量不确定度按字面可理解为对测量结果正确性的可疑程度，也可理解为表征被测量

真值所处范围的一个参量，前者只是定性说明而难以定量表述，后者因涉及真值这一概念而缺乏可操作性。对测量不确定度最新的定义：“表征合理地赋予被测量之值的分散性，与测量结果相联系的参量。”分散性的含义为一个量值区间，测量结果在这个区间出现，而不是一个确定的值。

测量不确定度来源于多个因素，因而它由多个分量组成。其中一些分量可用测量列的统计分布计算，称为 A 类评定，用实验标准差表征，记为 u_A；另一些分量用不同于统计分布的方法计算，称为 B 类评定，也用标准差来表征，记为 u_B。

5. 合成标准不确定度

在间接测量的情况下，测量结果 y 是其他直接测得量 x_i 的函数

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{1-5}$$

当各 x_i 彼此不相关时，按这些量的方差 u_i^2 算的不确定度，称为合成标准不确定度，以 u_c 表示

$$u_c = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 u_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 u_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 u_n^2} \tag{1-6}$$

式中 u_i 是 x_i 的标准不确定度；$\frac{\partial f}{\partial x_n}$ 是 u_i 的传播（递）系数。

6. 扩展不确定度

扩展不确定度是确定测量结果区间的量，在这个区间内，包含了合理赋予被测量的大部分量值。假如测量结果的最佳值为 $\bar{x}$，扩展不确定度为 U，则这个区间是指（$\bar{x}-U$，$\bar{x}+U$）。扩展不确定度 U 与合成标准不确定度 u_c 的区别在于：U 所确定的区间比 u_c 所确定的区间有更大的置信概率来包含被测量之值，因而在量值上前者比后者大。为了求得扩展不确定度 U，需对合成标准不确定度 u_c 乘以包含因子 k，即 $U=ku_c$，通常取 $k=2$。在某些特殊应用场合也可取 $k=1$ 或 $k=3$，本书不涉及这些场合。

7. 测量误差

测量结果减去被测量的真值称为测量误差。

对于单次测量，测量值就是测量结果；对于重复性测量，算术平均值就是测量结果。若以 $\bar{x}$ 表示测量结果，以 x_0 表示真值，则测量误差为

$$\Delta x = \bar{x} - x_0 \tag{1-7}$$

误差与不确定度是两个完全不同的概念，不应混淆和误用。在数轴上，误差是一个点，可正可负，而不确定度是一个区间，不能带负号。误差大小不以人的认知程度而改变，但无法准确得到。不确定度的大小与人的认知程度有关，可以通过适当的评定和计算得到。不同的测量结果，其误差必定不同，但不确定度可以相同。同理，测量结果相同，其测量误差必定相同，但测量不确定度可以不相同。测量误差按其产生的原因和性质可分为随机误差和系统误差。

8. 随机误差

由随机效应导致的误差称为随机误差。对同一物理量进行重复性测量得到 n 个测量

值，这些测量值的误差时大时小，时正时负而不可预知，这些不可预知的变化称为随机效应。正是随机效应导致了重复测量中的分散性，随机误差的量值等于测量结果减去总体均值，若以 $\bar{x}$ 表示测量结果，μ 表示测量列的总体均值，则随机误差可表示为

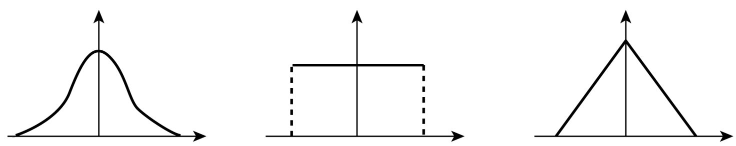
$$\varepsilon = \bar{x} - \mu \tag{1-8}$$

式中 μ 值不能准确得到，故随机误差的量值也不能准确得到。

当测量次数充分多时，各测得值的随机误差分布服从统计规律，随机误差的主要特性可归纳为有界性和对称性。

有界性是指测量误差的绝对值不会超过一定的界限，即不会出现绝对值过大的误差。对称性是指绝对值相等而符号相反的误差出现的次数大致相等，即测量值是以它们的算术平均值为中心而对称分布的，这样所有误差的代数和趋近于零，所以随机误差又具有抵偿性。

当误差分布呈现正态分布、三角分布或矩形分布时，随机误差还具有单峰性，如图1-1所示。



（a）正态分布　（b）矩形分布　（c）三角分布

图 1-1　随机误差的单峰性

9. 系统误差

由系统效应导致的误差称为系统误差。这里所说的系统效应主要来源于测量方法不理想、对环境条件的测量和控制不完善、测量仪器性能的不完善等。在物理实验教学中，由测量仪器性能不完善而引起的误差，常常成为我们重点考虑的误差来源。

系统误差的量值等于总体均值减去被测量的真值。若以 μ 表示总体均值，x_0 表示真值，则系统误差为

$$\delta = \mu - x_0 \tag{1-9}$$

由于 μ 与 x_0 都是理想的概念，故系统误差也是无法准确得到的。

由式（1-7）至式（1-9）可得

$$\Delta x = \varepsilon + \delta \tag{1-10}$$

式（1-10）告诉我们，测量误差等于随机误差与系统误差的代数和。由于随机误差和系统误差都是无法准确得到的，因此用式（1-10）不能将误差计算出来，但它清楚地说明了这样一个事实：测量误差是由随机效应和系统效应共同影响的结果。所以在分析不确定度来源时，既要考虑随机效应引起的不确定度，又要考虑由系统效应引起的不确定度。

第四节　直接测量的数据处理

能直接得到被测量值而不必去测量与被测量有函数关系的其他量的方法叫作直接测量。在物理实验教学中，直接测量数据处理的一般程序如下：

（1）以测量列 x_1，x_2，…，x_n 为样本，求出样本均值 $\bar{x}$ 作为测量结果的最佳值；

（2）根据样本进行 A 类评定，求出 μ_A；

（3）根据测量仪器的性能进行 B 类评定，求出 μ_B；

（4）再求出标准不确定度 $u=u_C=\sqrt{u_A^2+u_B^2}$；

（5）最后求出扩展不确定度 $U=2u_C$，写出结果表达式。

下面就来作具体讨论。

1. 测量结果的最佳估计值

对被测量进行直接测量时，通常是对被测量进行 n 次测量，得到一个测量列

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

它的样本均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{1-11}$$

就是测量结果的最佳值。

2. A 类评定

在 n 个测量值中，任一测量值 x_i 的大小都具有随机性，即它分布在某一个区间内的任何一点都是可能的，由贝塞尔公式给出实验标准差：

$$S(x_i)=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{1-12}$$

就表明了任一测量值 x_i 的分散性。样本均值 $\bar{x}$ 是通过随机取出的样本计算出来的，所以 $\bar{x}$ 也有分散性，比如对同一被测量进行若干组重复测量，每一组都得到 n 个测量值，则每一组都能计算出一个平均值，这些平均值也是各不相同的，所以 $\bar{x}$ 也有分散性，只不过 $\bar{x}$ 的分散性比 S（x_i）更小，平均值 $\bar{x}$ 的分散性的大小用平均值的标准差

$$S(\bar{x})=\frac{1}{\sqrt{n}}S(x_i)=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{1-13}$$

来表征。

式（1-13）就是用统计分析方法评定出的关于 $\bar{x}$ 的标准不确定度分量，称为 A 类标准不确定度，记为

$$u_A=S(\bar{x}) \tag{1-14}$$

u_A 的大小反映了测量结果 $\bar{x}$ 由重复性引起的不确定度分量。

3. B 类评定

下面讨论由系统效应引起的不确定度分量的评定方法。在多数情况下，由系统效应引起的不确定度分量需采用不同于 A 类评定的其他方法来评定，称为 B 类评定。

在进行 B 类评定时，首要问题是要知道测量仪器的“最大允许误差”。所谓最大允许误差，是指测量仪器在有关规范、规程能允许的误差极限值，本书中以 $\Delta_{仪}$ 来表示。仪器的型号不同，其最大允许误差也不同。有些仪器可通过查询国家计量检定规程得到，如卡尺、千分尺、天平等。有些仪器可在其铭牌和使用说明书中查到，如直流电桥、直流电位差计等。还有些仪器，在铭牌上给出了准确度等级，它可以换算成 $\Delta_{仪}$。总之，在进行 B 类评定时，要通过查阅相关资料，以获得测量仪器的性能参量。

仪器的最大允许误差，是仪器示值相对被测量值之差的最大允许值，也可以理解为这个差值的分布不会超过区间（$-\Delta_{仪}$，$+\Delta_{仪}$），或者说在不考虑随机误差时被测量值以 100% 的置信概率包含在区间（$\bar{x}-\Delta_{仪}$，$\bar{x}+\Delta_{仪}$）之内。因为 u_B 的置信概率小于 $\Delta_{仪}$ 的置信概率，所以在量值上 $u_B<\Delta_{仪}$，本书约定

$$u_B = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta_{仪} \tag{1-15}$$

4. 标准不确定度和扩展不确定度的计算

u_A 是由 A 类评定得到的标准不确定度分量，u_B 是由 B 类评定得到的标准不确定度分量，将 u_A 和 u_B 按“方和根”合成，得到 $\bar{x}$ 的标准不确定度

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \tag{1-16}$$

将式（1-14）、式（1-15）代入式（1-16）得

$$u = \sqrt{S^2(\bar{x}) + \frac{1}{3}\Delta_{仪}^2} \tag{1-17}$$

则 $\bar{x}$ 的扩展不确定度为

$$U = 2\sqrt{S^2(\bar{x}) + \frac{1}{3}\Delta_{仪}^2} \tag{1-18}$$

5. 测量结果表达式

对直接测量来说，测量结果的最佳值为 $\bar{x}$，扩展不确定度为 U，则测量结果表达式为

$$x = \bar{x} \pm U,\ k = 2 \tag{1-19}$$

下面对式（1-19）作几点说明。

（1）由式（1-19）可知，被测物理量的量值以较大概率落在（$\bar{x}-U$，$\bar{x}+U$）区间之内，当 $k=2$ 时，这一概率可望达到 90% 以上。或者反过来说，被测量的量值落在上述区间之外的可能性较小，其概率不会超过 10%。

（2）测量结果表达式应附有被测物理量的单位。

（3）关于 $\bar{x}$ 和 $S(\bar{x})$ 的计算，可借助计算机软件或带有统计运算功能的袖珍计算器，它可以使繁重的计算变得轻松且快捷。

（4）关于有效数字取位的原则：扩展不确定度 U 只取 1 位有效数字，第 2 位按四舍五入处理。最佳值 $\bar{x}$ 的最末一位要与 U 所在位对齐。当 U 的首位数为 1 或 2 时，可取 2 位有效数字，相对扩展不确定度应取 2 位有效数字。

6. 直接测量数据处理举例

例 1-1 用 $\Delta_{仪}=0.02$ mm 的游标卡尺测某物的长度，测量数据为 29.18 mm，29.24 mm，29.28 mm，29.26 mm，29.22 mm，29.24 mm。试求：

（1）样本均值 $\bar{x}$。

（2）单次测量值的实验标准差 $S(x_i)$。

（3）平均值 $\bar{x}$ 的标准差 $S(\bar{x})$。

（4）A 类评定的不确定度分量 u_A。

（5）B 类评定的不确定度分量 u_B。

（6）扩展不确定度 U。

（7）测量结果表达式。

解 将测量值逐一输入计算机，经统计运算后得

$$\bar{x}：29.236\ 666\ 67 \text{ mm}$$

$$S(x_i)：0.034\ 448\ 028 \text{ mm}$$

$$S(\bar{x})：0.014\ 063\ 349 \text{ mm}$$

A 类分量
$$u_A=S(\bar{x})=0.014\ 063\ 349 \text{ mm}$$

B 类分量
$$u_B=\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta_{仪}=0.011\ 547\ 005 \text{ mm}$$

扩展不确定度

$$U=2\times\sqrt{u_A^2+u_B^2}=0.036\ 392\ 918 \text{ mm}$$

下面对 U 和 $\bar{x}$ 进行有效数字修约，U 的首位数是 3，可取一位有效数字，所以 $U=0.04$，$\bar{x}$ 末位与 U 所在位对齐，即 $\bar{x}$ 的末位应在百分位上，因为 U 就是在百分位上。这样 $\bar{x}=29.24$，结果表达式应写成

$$\bar{x}=(29.24\pm0.04) \text{ mm}，k=2$$

也可以写成

$$x=29.24\times(1\pm0.12\%) \text{ mm}，k=2$$

括号中的相对不确定度的计算数据应为 $\frac{0.036}{29.237}=0.12\%$，不应取为 $\frac{0.04}{29.24}=0.14\%$，以免因为数据修约给测量结果带来新的不确定度。

例 1-2　某一数字多用表，最大允许误差为

$$\Delta_{仪}=0.005\%\times读数+3\times最小步进值$$

用此仪表测高值电阻，共测量 10 次，数据如表 1-1。

表 1-1　实验数据

测量次数i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R_i/kΩ	999.31	999.41	999.59	999.26	999.54	999.23	999.14	999.06	999.92	999.62

试写出测量结果表达式。

解　样本均值为

$$\bar{R}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}R_i=999.406\ \text{k}\Omega$$

实验标准差为

$$S(R_i)=\sqrt{\frac{\sum(R_i-\bar{R})^2}{n-1}}=0.261\ \text{k}\Omega$$

平均值的标准差为

$$S(\bar{R})=\frac{S(R_i)}{\sqrt{n}}=0.082\ \text{k}\Omega$$

由随机效应（读数重复性）引入的不确定度分量按 A 类评定为

$$u_{\text{A}}=S(\bar{R})=0.082\ \text{k}\Omega$$

由系统效应（仪表准确性）引入的不确定度分量按 B 类评定为

$$u_{\text{B}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta_{仪}=\frac{1}{\sqrt{3}}(0.005\%\times999.406+3\times0.01)=0.046\ \text{k}\Omega$$

测量结果的标准不确定度为

$$u=\sqrt{u_{\text{A}}^2+u_{\text{B}}^2}=0.094\ \text{k}\Omega$$

扩展不确定度为

$$U=2u=0.188\ \text{k}\Omega\approx0.19\ \text{k}\Omega$$

因为 U 的首位数是 1，所以取两位有效数字。

相对扩展不确定度为

$$\frac{U}{\bar{R}}=\frac{0.188}{999.406}=0.019\%$$

结果表达式为

$$R=(999.41\pm0.19)\text{k}\Omega,\ k=2$$

也可以写成

$$R=999.41\times(1\pm0.019\%)\text{k}\Omega,\ k=2$$

第五节　间接测量的数据处理

设被测量 y 与其它量有函数关系，测量结果由函数计算而得

$$y=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \tag{1-20}$$

在这种情况下，数据处理程序如下：

（1）用直接测量的数据处理方法分别计算出 $\bar{x}_i$ 和 u_i，即由式（1-11）计算出

$$\bar{x}_i=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}$$

由式（1-17）计算出 u_i。

（2）计算出 y 的最佳估计值 $\bar{y}$。

（3）计算出 $\bar{y}$ 的合成标准不确定度 u_c（$\bar{y}$）及扩展不确定度 U。

（4）写出结果表达式。

下面分别讨论。

1. 间接测量的最佳值

首先用直接测量的数据处理方法计算出 $\bar{x}_i$ 和 u_i，然后将各 $\bar{x}_i$ 代入式（1-20）中，得到

$$\bar{y}=f(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \cdots,\ \bar{x}_n) \tag{1-21}$$

作为间接测得量 y 的最佳估计值。由于 $\bar{x}_i$ 具有不确定度，因此由式（1-21）得到的 $\bar{y}$ 也必然具有不确定度。或者说，由于 $\bar{x}_i$ 具有分散性，因此 $\bar{y}$ 也具有分散性，表征这一分散性的参量就是合成标准不确定度 u_c（$\bar{y}$）。

2. 合成标准不确定度的评定

$\bar{y}$ 的不确定度来源于所有 $\bar{x}_i$ 的不确定度，也就是 $\bar{y}$ 的合成标准不确定度 $u_c(\bar{y})$ 是由各直接测得量 x_1，x_2，…，x_n 的标准不确定度 u_1，u_2，…，u_n 适当合成而求得。当全部直接测得量 x_i 彼此独立时，$\bar{y}$ 的合成标准不确定度由下式给出

$$u_c(\bar{y})=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2u_1^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2u_2^2+\cdots} \tag{1-22}$$

式（1-22）称为不确定度传播律，式中 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 就是函数 $y=f$（x_1，x_2，…）在 $x_i=\bar{x}_i$ 时的偏导数，这些偏导数称为灵敏系数，记为 c_i，即 $c_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$，它表示被测量估计值 $\bar{y}$ 随直接测得值 $\bar{x}_i$ 变化的程度，即当 $\bar{x}_i$ 有微小变化 Δx_i 时，$\bar{y}$ 值相应变化为 $(\Delta y)_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$，如果这个变化 Δx_i 来自 $\bar{x}_i$ 的不确定度 u_i，则 $\bar{y}$ 的相应变化就是

$$u_i(\bar{y}) = \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i = c_i u_i$$

$u_i(\bar{y})$ 是 $u_c(\bar{y})$ 的一个分量，它表示第 i 个直接测得值 $\bar{x}_i$ 的不确定度 u_i 对 $\bar{y}$ 的不确定度所做的贡献。

$\bar{y}$ 的扩展不确定度为合成标准不确定度乘以包含因子 k，若取 $k=2$，则

$$U(\bar{y}) = 2u_c(\bar{y}) \tag{1-23}$$

如果函数 f 的表现形式为

$$y = cx_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}$$

两边取自然对数

$$\ln y = \ln c + p_1\ln x_1 + p_2\ln x_2 + \cdots$$

按不确定度传播定律有

$$\frac{u_c(\bar{y})}{\bar{y}} = \sqrt{\left(p_1\frac{u_1}{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(p_2\frac{u_2}{\bar{x}_2}\right)^2 + \cdots} \tag{1-24}$$

如果指数 p_i 只是+1 或−1，则式（1−24）成为

$$\frac{u_c(\bar{y})}{\bar{y}} = \sqrt{\left(\frac{u_1}{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{\bar{x}_2}\right)^2 + \cdots} \tag{1-25}$$

式（1−25）说明，当 y 是 x_i 的乘除运算结果时，则 $\bar{y}$ 的相对不确定度是各 $\bar{x}_i$ 的相对不确定度的“方和根”。例如一个长方体的体积 $V=lbh$，则 V 的相对合成标准不确定度为

$$\frac{u_c(\bar{V})}{\bar{V}} = \sqrt{\left(\frac{u_{\bar{l}}}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{u_{\bar{b}}}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{u_{\bar{h}}}{\bar{h}}\right)^2}$$

3. 间接测量的结果表达式

由式（1−21）得到 $\bar{y}$，由式（1−23）得到 $U(\bar{y})$，则测量结果表达式为

$$y = \bar{y} \pm U(\bar{y}),\ k = 2 \tag{1-26}$$

还可以写成

$$y = \bar{y} \times \left[1 \pm \frac{U(\bar{y})}{\bar{y}} \times 100\%\right],\ k = 2$$

下面对式（1−26）作几点说明

（1）式（1−26）表明，被测量值以较大概率处在区间（$\bar{y}-U$，$\bar{y}+U$）之内，当 $k=2$ 时，这个概率可望达到 90%以上。

（2）扩展不确定度 U 一般只取一位有效数字，当 U 的首位数是 1 或 2 时，可取两位有效数字，$\bar{y}$ 的末位与 U 所在数位对齐，相对扩展不确定度$\frac{U}{\bar{y}}\times 100\%$取两位有效数字。若 $\bar{y}$ 的有效数字比 u 还少，，则应加零补齐，例如 $\bar{y}$ 为 36.06 mm，U 为 0.007 mm，结果表达式应写成 $y=$（36.060±0.007）mm。在 U 的连续运算中，其不确定度分量或标准不确定

度至少应多保留一位数字，以避免由于数字修约产生新的不确定度。当然用计算器进行运算时，则不会出现这样的问题。

4. 间接测量的数据处理举例

例 1-3 在 20 ℃条件下，用一级千分尺测量某金属圆柱体的体积，测量数据见表 1-2。

表 1-2 测量数据

d_i/cm	1.007 1	1.007 3	1.006 9	1.007 8	1.007 0	1.007 4
h_i/cm	2.010 5	2.011 0	2.010 8	2.011 2	2.010 4	2.010 0

体积计算公式为 $V=\frac{1}{4}\pi d^2 h$，试写出测量结果表达式。

解 将 d_i 输入计算器，经统计运算得到

$$\bar{d}=1.007\,25\ \text{cm},\quad S(d_i)=0.000\,327\ \text{cm}$$

将 h_i 输入计算器，经运算得到

$$\bar{h}=2.010\,65\ \text{cm},\quad S(h_i)=0.000\,437\ \text{cm}$$

由测量重复性导致的不确定度分量为

$$u_A(\bar{d})=\frac{S(d_i)}{\sqrt{6}}=0.000\,13\ \text{cm}$$

$$u_A(\bar{h})=\frac{S(h_i)}{\sqrt{6}}=0.000\,18\ \text{cm}$$

由千分尺准确性导致的不确定度分量，可根据千分尺的最大允许误差求出，按规定量程为 25 mm 的一级千分尺，其最大允许误差 $\Delta_{仪}=0.004\ \text{mm}=0.000\,4\ \text{cm}$，其标准不确定度为

$$u_B(\bar{d})=u_B(\bar{h})=\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta_{仪}=0.000\,23\ \text{cm}$$

直径 $\bar{d}$ 的标准不确定度为

$$u_{\bar{d}}=\sqrt{u_A^2(\bar{d})+u_B^2(\bar{d})}=\sqrt{0.00013^2+0.00023^2}=0.000\,26\ \text{cm}$$

高 $\bar{h}$ 的标准不确定度为

$$u_{\bar{h}}=\sqrt{u_A^2(\bar{h})+u_B^2(\bar{h})}=\sqrt{0.00018^2+0.00023^2}=0.000\,29\ \text{cm}$$

体积的最佳估计值为

$$\bar{V}=\frac{1}{4}\pi\bar{d}^2\bar{h}=0.25\times 3.14159\times 1.00725^2\times 2.01065=1.602\,14\ \text{cm}^3$$

π 取到小数点后第 5 位，避免了因 π 的取位过少而产生新的不确定度。$\bar{V}$ 的相对合成标准不确定度为

$$\frac{u_c(\bar{V})}{\bar{V}}=\sqrt{4\left(\frac{u_{\bar{d}}}{\bar{d}}\right)^2+\left(\frac{u_{\bar{h}}}{\bar{h}}\right)^2}=\sqrt{4\times\left(\frac{0.00026}{1.00725}\right)^2+\left(\frac{0.00029}{2.01065}\right)^2}=0.000\,536=0.053\,6\%$$

$\overline{V}$ 的相对扩展不确定度为

$$E=\frac{U}{\overline{V}}=\frac{2u_c(\overline{V})}{\overline{V}}=0.001\ 07\approx0.11\%$$

结果表达式为

$$V=1.6021\times(1\ \pm0.11\%)\mathrm{cm}^3,\ k=2$$

上式中 $\overline{V}$ 取到小数点后第 4 位，因为扩展不确定度的末位就在小数点后第 4 位上，即

$$U=E\cdot\overline{V}=0.00107\times1.60214\ \mathrm{cm}^3\approx0.001\ 7\ \mathrm{cm}^3$$

结果表达式还可以写成

$$V=(1.6021\ \pm0.0017)\mathrm{cm}^3,\ k=2$$

例 1-4　间接测得量 y 与直接测得量 x_1、x_2 有函数关系 $y=x_1+x_2$。已知

$$x_1=(400\ \pm4)\mathrm{mm},\ k=2$$

$$x_2=(32.1\ \pm0.2)\mathrm{mm},\ k=2$$

试写出 y 的测量结果表达式。

解　y 的最佳估计值为

$$\overline{y}=\overline{x}_1+\overline{x}_2=400+32.1=432.1\ \mathrm{mm}$$

$\overline{y}$ 的扩展不确定度为

$$U=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}U_1\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}U_2\right)^2}=\sqrt{4^2+0.2^2}=4\ \mathrm{mm}$$

也可以先计算出合成标准不确定度

$$u_c(\overline{y})=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2u_1^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\ x_2}\right)^2u_2^2}=\sqrt{2^2+0.1^2}=2.0\ \mathrm{mm}$$

式中
$$u_1=\frac{1}{2}U_1=2\ \mathrm{mm},\ u_2=\frac{1}{2}U_2=0.1\ \mathrm{mm}$$

再求出扩展不确定度

$$U=2u_c(\overline{y})=4\ \mathrm{mm}$$

可见，两种算法结果一致。

测量结果表达式为

$$y=(432\ \pm4)\mathrm{mm},\ k=2$$

第六节　有效数字及其处理方法

一、测量仪器的精密度和有效数字

要对某一物理量进行测量，必须使用各种仪器。而各种仪器由于其结构及生产技术条

件等各方面因素的限制，都有一定的精密度。使用不同精密度的仪器，测量结果的精确度也各不相同。

所谓仪器的精密度，一般定义为最小分格所代表的量为该仪器的精密度。例如米尺的最小分格是 1 mm，其精密度就是 1 mm。有的仪器有特殊标记，例如某一天平的感量是 0.01 g，其精密度也就是 0.01 g，此时就不能用最小分格代表精密度。而有些电子仪表的精密度是以级数标记的，例如某电表是 2.5 级，表示测量误差为 2.5%。级数越小，精密度就越高。

仪器的精密度限制了测量的精确度，例如我们用米尺测量某一物体的长度，测得值是在 3.2 cm 和 3.3 cm 之间，能否再精确一点呢？那就要估计读数了，比如说，估计得 3.26 cm。显然最后一位数“6”是不准确的，不同的实验者所估计出来的数不一定相同，因而是可疑数字。我们把测量结果的数字记录到开始可疑的那一位为止。可靠的几位数字加上可疑的一位数字，统称为测量结果的有效数字。

显然，直接测量值的有效数字取决于测量仪器的精密度，所以直接测量值应根据仪器的条件（精密度）写出对应的有效数字。有效数字的位数不能随意增删，因为它不仅反映了测量值的大小，而且也反映了测量的精确程度，因而表示了测量的误差范围。

间接测量值是根据直接测量值计算才得出的，它的有效数字位数取决于各直接测量值，一般可按下列规则进行运算。

二、有效数字的运算法则

（一）有效数字的位数和科学计数法表示

（1）有效数字的位数与小数点的位置无关，也就是说与十进制的单位换算无关。如 5.30 cm 换算成 53.0 mm 或 0.0530 m 是一样的，都是三位有效数字。其中数字前表示小数点位置的“0”不是有效数字。

（2）“0”在数字中间或数字末尾均是有效数字。如 1.205、120.500 中的“0“都是有效数字。但要注意两数的有效数字位数是不一样的。

（3）有效数字与自然数或常数的关系。在运算中常会遇到自然数和常数，例如 π、e、$\sqrt{2}$、$\sin\frac{\pi}{2}$等，这些数不是测量值，其有效数字可认为是无穷的，需要取几位就取几位，通常所取位数与测量值的位数一样就可以了。

（4）有效数字的舍入规则。有效数字的最后一位是可疑数字，其后面的数字按舍入法处理。通常所用的四舍五入，对于大量尾数分布概率相同的数据来说，不是很合理，因总是入的概率大于舍的概率。现在通用的做法是四舍六入五凑偶的法则处理：尾数小于 5 则舍，大于 5 则入，等于 5 则凑成双数。即 5 的前面若是单数，5 则入，使前面一位变成偶数，5 的前面若是偶数，5 则舍。如 1.535 取三位有效数字为 1.54；12.405 取四位有效数字为 12.40。注意 5 前面的 0 是接偶数处理。

（5）为避免由于舍入过多带来的较大误差，运算中可多保留一位数字，但最后结果只

能有一位可疑数字。在乘除运算时，有效数字第一位是 8 或 9，可看成多一位有效数字来处理。例如 82 可看成 82.0

当测量结果的数值很大或很小，而有效数字的位数又不多时，应该用指数的形式表示，即科学计数法表示。使用时，小数点前一般只有一位有效数字。

如测得一微小长度 $L=(0.0045\pm0.0003)\,\mathrm{cm}$，应写成 $L=(4.5\pm0.3)\times10^{-3}\,\mathrm{cm}$。这种表示既正确反映了有效数字的位数，又使得计算简单明了。

（二）有效数字的近似运算法则

除了前面提到的有效数字的确定方法外，还有一种近似的计算规则。该方法计算简便，常用于对实验结果有效数字位数的粗略评估。此种方法采用竖式运算。

1. 加法与减法

我们通过以下两例来说明有效数字的加减法计算规则。例如

$$\begin{array}{r} 4.2\underline{0} \\ +\,0.374\underline{5} \\ \hline 4.5\underline{7}\,\underline{4}\,\underline{5}\approx4.5\underline{7} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 33.2\underline{6} \\ -\;\;0.34\underline{3} \\ \hline 32.9\underline{1}\,\underline{7}\approx32.9\underline{2} \end{array}$$

由于各有效数字的最后一位是有误差的、可疑的，我们在其下方画一横线表示。考虑到只有两个可靠数运算后的结果仍是可靠数外，其余可疑数与可靠数、可疑数与可疑数运算后的结果全是可疑数。最后只能保留一位可疑数字，其余的可疑数字进行四舍五入后，便得到计算结果的有效数字。

不难看出，加减法计算结果的有效数字最后一位的数量级和参加运算诸数中末位误差最大的数量级相一致。

2. 乘除法

我们通过两例来说明有效数字的乘除法计算规则。例如

$$\begin{array}{r} 152.\underline{1} \\ \times\qquad 2.\underline{3} \\ \hline \underline{4}\,\underline{5}\,\underline{6}\,\underline{3} \\ 304\underline{2} \\ \hline 3\underline{4}\,\underline{9}.\underline{8}\,\underline{3}\approx3.\underline{5}\times10^{2} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 7\underline{7}.\underline{9}\approx7\underline{8} \\ 1.1\overline{\big)\,85.7\underline{4}} \\ -7\underline{7} \\ \hline \underline{8}\,7 \\ \underline{7}\,\underline{7} \\ \hline \underline{1}\,\underline{0}\,\underline{4} \\ \underline{9}\,\underline{9} \\ \hline \underline{5} \end{array}$$

不难看出，乘除法计算结果的有效数字位数和参加运算诸数中的有效数字位数最少的相一致。

3. 乘方与开方

乘方与开方计算结果的有效数字位数与底数的有效数字位数相同。例如

$$\sqrt{14.\underline{6}}=3.8\underline{2}, \qquad (5.2\underline{5})^2=27.\underline{6}$$

（4）三角函数

三角函数的有效数字位数与角度的位数相同。例如 $\cos 32.\underline{7}^0=0.84\underline{2}$

（5）对数

对数的有效数字位数与真数的位数相同。例如 $\lg 19.2\underline{8}=1.28\underline{5}$

三、常用的实验数据处理方法

从实验中得到原始测量数据后，还需经过一系列的处理和计算才能反映出事物的内在规律或得出最终的测量值，整个加工过程称为数据处理，它包括数据记录、整理、计算、分析和绘制图表等。我们可以根据不同的需要，采取不同的数据处理方法。下面介绍几种常用的数据处理方法。

（一）列表法

对一个物理量进行多次测量或研究几个量之间的关系时，往往借助于列表法将实验数据列成表格。其优点是大量数据表达清晰醒目，条理化，易于检查数据和发现问题，避免差错，同时有助于反映出物理量之间的对应关系。所以设计一个简明醒目、合理美观的数据表格，是每一个学生都要掌握的基本技能。

列表没有统一的格式，但所设计的表格要能充分反映上述优点，应注意以下几点：

（1）各栏目均应注明所记录的物理量的名称（符号）和所用的单位；

（2）栏目的顺序应充分注意数据间的联系和计算顺序，力求简明、齐全、有条理；

（3）表中的原始测量数据应正确反映有效数字，数据不应随便涂改，确实要修改数据时，应将原来数据画条杠以备随时查验；

（4）对于函数关系的数据表格，应按自变量由小到大或由大到小的顺序排列，以便于判断和处理；

（5）若为间接测量，还应简要列出计算公式；

（6）标明有关的环境参数（实验时间、环境温度、气压等），引用的常量和物理量等以便参考，提供必要的说明和参数，包括表格名称、主要测量仪器的规格（型号、量程、准确度级别或最大允许误差等）。

（二）图示法

许多情况下，实验所得数据是表示一物理量（因变量）随另一物理量（自变量）而改变的关系。这些对应关系的变化情况，通常用图示法将它们以曲线的形式描绘出来。

1. 作图法的优点

（1）能够形象、直观、简便地显示出物理量的相互关系，以及函数的极值、拐点、突变或周期性等特征。

（2）读出没有进行观测的对应点（内插法），或在一定条件下从图线的延伸部分得到

测量范围以外的对应点（外推法）。

（3）具有取平均的效果。因为每个数据都存在测量不确定度，所以曲线不可能通过每一个测量点。但对于曲线，测量点是靠近和匀称分布的，故曲线具有多次测量取平均的效果。

（4）有助于发现测量中的个别错误数据。虽然曲线不可能通过所有的数据点，但不在曲线上的点都应是靠近曲线才合理。如果某一个点距曲线的距离明显地远了，说明这个数据错了，要分析产生错误的原因，必要时可重新测量或剔除该测量点的数据。

（5）作图法是一种基本的数据处理方法，不仅可以用于分析物理量之间的关系，求经验公式，还可以求物理量的值。但受图纸大小的限制，一般只有 3～4 位有效数字，且连线具有较大的主观性。所以用作图法求值时，一般不再计算不确定度。

在报告实验结果时，一条正确的曲线往往胜过千百个文字的描述，它能使实验中各物理量间的关系一目了然，所以只要有可能，实验结果就要用曲线表达出来。

2. 作图规则

（1）列表：按列表规则，将作图的有关数据列成完整的表格，注意名称、符号及有效数字的规范使用。

（2）选择坐标纸：作图必须用坐标纸，应根据物理量的函数关系选择合适的坐标纸。最常用的坐标纸是直角坐标纸，此外还有对数坐标纸、半对数坐标纸、极坐标纸等。本节以直角坐标为例介绍作图法，其他坐标可参考本节的原则进行作图。

坐标纸的大小要根据测量数据的有效位数和实验结果的要求来决定，原则是以不损失实验数据的有效数字和能包括全部实验点作为最低要求，即坐标纸的最小分格应与实验数据的最后一位准确数字相当。在某些情况下，如数据的有效位太少使得图形太小，还要适当放大以便于观察，同时也有利于避免由于作图而引入附加的误差；若有效位数过多，又不宜把该轴取得过长，则应适当牺牲有效数字位数，以求纵横比适度。

（3）一般以横坐标表示自变量，纵坐标表示因变量，在坐标轴末端标明所示物理量的名称、单位，在图的下方标出图名。

（4）曲线改直：由于直线最易描绘，且直线方程的两个参数（斜率和截距）也较易算得，所以对于两个变量之间的函数关系是非线性的情形，在用图解法时应尽可能通过变量代换将非线性的函数曲线转变为线性函数的直线。下面为几种常用的变换方法。

① $xy=c$（c 为常数）。令 $z=\dfrac{1}{x}$，则 $y=cz$，即 y 与 z 为线性关系。

② $x=c\sqrt{y}$（c 为常数）。令 $z=x^2$，则 $y=\dfrac{1}{c^2}z$，即 y 与 z 为线性关系。

③ $y=ax^b$（a 和 b 为常数）。等式两边取对数得，$\lg y=\lg a+b\lg x$。于是，$\lg y$ 与 $\lg x$ 为线性关系，b 为斜率，$\lg a$ 为截距。

④ $y=ae^{bx}$（a 和 b 为常数）。等式两边取自然对数得，$\ln y=\ln a+bx$。于是，$\ln y$ 与 x 为线性关系，b 为斜率，$\ln a$ 为截距。

（5）确定坐标比例与标度。合理选择坐标比例是作图法的关键所在。根据测量数据的范围选定坐标分度，应尽量使曲线占据图纸的大部分或全部，为了调整曲线的大小和位

置，应选取合适的坐标比例和标度。

坐标比例是指坐标轴上单位长度（通常为 1 cm）所代表的物理量大小。坐标比例的选取应注意以下几点。

① 原则上做到数据中的可靠数字在图上应是可靠的，即坐标轴上的最小分度（1 cm）对应于实验数据的最后一位准确数字。坐标比例选得过大会影响数据的准确度。

② 坐标比例的选取应以便于读数为原则，常用的比例为“1∶1”“1∶2”“1∶5”(包括“1∶0.1”“1∶10”…)，即每厘米代表“1、2、5”倍率单位的物理量。切勿采用复杂的比例关系，如“1∶3”“1∶7”“1∶9”等。这样不但不易绘图，而且读数困难。

坐标比例确定后，应对坐标轴进行标度，即在坐标轴上均匀地（一般每隔 2 cm 为宜）标出所代表物理量的准确数值，标记所用的有效数字位数应与实验数据的有效数字位数相同。标度不一定从零开始，一般用小于实验数据最小值的某一数作为坐标轴的起始点，用大于实验数据最大值的某一数作为终点，这样图纸可以被充分利用。

(6) 将实验数据用符号“+”在坐标上标出其位置。如果在同一图纸上做几条曲线，则每条曲线须用不同符号标出（如×、⊙等)，以免混淆。

(7) 曲线的描绘，各实验点标出后，用直尺或曲线尺将这些点连接起来绘出曲线，由于实验过程中不可避免地会产生误差，因此不可能将每一个点都包括在曲线上，而是有一定的偏离。要经过细心处理，使绘出的直线或曲线是平滑的而不是弯折的，同时使偏离曲线两侧的点数差不多相等，以至于曲线上每个点更接近于所要求的平均值。

(8) 注解与说明。在图纸上要写明图线的名称、坐标比例及必要的说明（主要指实验条件)，并在恰当地方注明作者姓名、日期等。

(9) 直线图解法求待定常数。直线图解法首先是求出斜率和截距，进而得出完整的线性方程，其步骤如下：

① 选点　在直线上紧靠实验数据两个端点内侧取两点 A（x_1，y_1)、B（x_2，y_2)，并用不同于实验数据的符号标明，在符号旁边注明其坐标值（注意有效数字)。若选取的两点距离较近，计算斜率时会减少有效数字的位数。这两点既不能在实验数据范围以外取点，因为它已无实验根据，也不能直接使用原始测量数据点计算斜率。

② 求斜率　设直线方程为 $y=a+bx$，则斜率为

$$b=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

③ 求截距　截距的计算公式为

$$a=y_1-bx_1$$

(三) 累加法

当自变量与因变量均从零开始线性增加时，欲测其线性比例系数，可采用累加法处理数据。设 y、x 满足线性关系 $y=kx$，求比例系数 k。共测出 n 组 x、y 的对应值，x_1，x_2，…，x_n 和 y_1，y_2，…，y_n，因此有

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= kx_1 \\ y_2 &= kx_2 \\ &\vdots \\ y_n &= kx_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow k = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$$

这种方法的好处是充分使用 x 和 y 的测量值，从而减小了相对误差。

(四) 逐差法

当两物理量成线性关系时，常用逐差法来计算因变量变化的平均值；当函数关系为多项式形式时，也可用逐差法来求多项式的系数。逐差法也称为环差法。

1. 逐差法的优点和使用条件

逐差法主要有以下三个优点：

(1) 充分利用测量数据，更好地发挥了多次测量取平均值的效果。

(2) 绕过某些定值未知量。

(3) 可验证表达式或求多项式的系数。

逐差法的适用条件：

(1) 两物理量 x，y 之间的关系可表达为多项式形式。

例如 $y = b_0 + b_1 x$

$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$

$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$

(2) 变量 x 必须等间距变化，且较因变量 y 有更高的测量准确度，以致通常 x 的测量不确定度忽略不计。

2. 逐项逐差

逐项逐差就是把因变量 y 的测量数据逐项相减，用来检查 y 对于 x 是否成线性关系，否则用多次逐差来检查多项式的幂次。

(1) 一次逐差

若 $y = b_0 + b_1 x$，测得一系列对应的数据

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n$$
$$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_k,\ \cdots,\ y_n$$

逐项逐差得到：

$$y_2 - y_1 = \Delta y_1,\ y_3 - y_1 = \Delta y_2,\ \cdots,\ y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$$

因为 y 对于 x 成线性关系，且 x 为等间距变化，故 Δy_k = 常量，所以若对实验测量值进行逐项逐差得到

$$\Delta y_k \approx \text{常量}$$

则证明 y 对于 x 成线性关系。

(2) 二次逐差

若 $y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$，则逐项逐差后所得结果 $\Delta y_k \neq$ 常量，遂将 Δy_k 再作一次逐项逐

差（称为二次逐差）

$$\Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta' y_1,\ \Delta y_3 - \Delta y_1 = \Delta' y_2,\ \cdots,\ \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = \Delta' y_k$$

同理，若二次逐差结果 $\Delta y_k \approx$ 常量，则可证明 y 对于 x 为二次幂的关系。依此类推，还可以进行三次逐差或更高次逐差。

第七节　最小二乘法与线性回归

把实验的结果画成图表固然可以表示出物理规律，但是图表的表示往往不如用函数表示来得明确和方便，所以我们希望从实验的数据求经验方程，也称为方程的回归问题，变量之间的相关函数关系称为回归方程。

方程的回归首先要确定函数的形式，函数形式的确定一般是根据理论的推断或者从实验数据变化的趋势而推测出来。例如推断物理量 y 和 x 之间的关系是线性关系，则把函数的形式写成

$$y = a + bx \tag{1-27}$$

式中 a 和 b 均为常数，所以回归的问题可以认为是用实验的数据来确定方程（1-27）中的待定常数。

由一组实验数据找出一条最佳的拟合直线（或曲线），常用的方法是最小二乘法。最小二乘法原理：若能找到一条最佳的拟合直线，那么这条拟合直线上各相应点的值与测量值之差的平方和在所有拟合直线中应是最小的。

假设所研究两个变量 x 与 y 之间存在线性相关关系，回归方程的形式为式（1-27）所示的一条直线。测得一组数据 x_i，y_i（$i=1$，2，…，n），现在要解决的问题是怎样根据这组数据来确定式（1-27）中的系数 a 和 b。

我们讨论最简单的情况，即每个测量值都是等精度的，而且假定 x_i，y_i 中只有 y_{ii}是有明显的测量随机误差，如果 x_i，y_i 均有误差，只要将相对而言误差较小的变量作为 x 即可。

由于存在误差，实验点是不可能完全落在由式（1-27）拟合的直线上的。对于和某一个 x_i 相对应的 y_i 与直线在 y 方向上的偏差为

$$v_i = y_i - (a + bx_i)$$

如图 1-2 所示，求偏差平方和

$$S = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2 \tag{1-28}$$

根据最小二乘法原理，偏差平方和为最小，即

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2 = 最小 \tag{1-29}$$

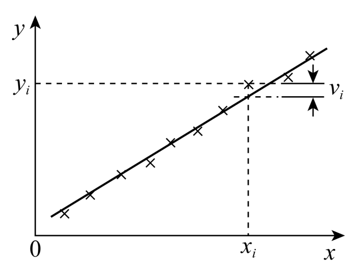


图 1-2　最小二乘法求拟合直线

在式（1-29）中，x_i，y_i 是已经测定的数据点，它们不是变量。要使方程达到最小，变动的量是 a 和 b。现在

根据求极值的条件，即式（1–29）对 a 的偏导数为零，对 b 的偏导数也为零，于是得到两个方程

$$\begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i) = 0 \\ -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)x_i = 0 \end{cases} \tag{1-30}$$

整理后写成

$$\begin{cases} \overline{x}b + a = \overline{y} \\ \overline{x^2}b + \overline{x}a = \overline{xy} \end{cases} \tag{1-31}$$

式中

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2},\quad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \tag{1-32}$$

联合求解 a 和 b，得

$$a = \overline{y} - b\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}y_i - b\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} \tag{1-33}$$

$$b = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2} - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2} \tag{1-34}$$

在前述假定只有 y_i 有明显随机误差条件，a 和 b 的标准偏差可用下列两式计算：

$$S_a = \sqrt{\frac{\overline{x^2}}{n(\overline{x^2} - \overline{x}^2)}}\cdot S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}}\cdot S_y \tag{1-35}$$

$$S_b = \sqrt{\frac{1}{n(\overline{x^2} - \overline{x}^2)}}\cdot S_y = \sqrt{\frac{n}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}}\cdot S_y \tag{1-36}$$

式中 S_y 为测量值 y_i 的标准偏差

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2}{n-2}} \tag{1-37}$$

要注意，这时分母是 n–2，这是因为确定两个未知数要用两个方程，多余的方程数为 n–2 个。

如果实验是要通过 x_i、y_i 的测量值来寻找经验公式，则还应判断上述一元线性拟合所找出的线性回归方程是否恰当，这可用下列相关系数 r 来判别：

$$r=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sqrt{(\overline{x^2}-\bar{x}^2)(\overline{y^2}-\bar{y}^2)}}=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}y_i^{\ 2}-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2}} \tag{1-38}$$

在物理实验中，一般 $|r|\geqslant 0.9$ 时，则认为 x 与 y 之间存在较密切的线性关系。

表 1-3 是推荐的最小二乘法数据处理表。

表 1-3　最小二乘法拟合直线数据处理表

i	x_i	y_i	x_iy_i	$x_i^{\ 2}$	$y_i^{\ 2}$	$y_c=a+bx_i$	y_i-y_c	$(y_i-y_c)^2$
1								
2								
3								
4								
⋮								
n								
Σ 应为								0

注：|←——算 a，b 用——→|算 r 用|←——算 S_a，S_b 用——→|。

以下是用 EXCEL 处理线性回归的示例。

1. 用 EXCEL 对 IF-UF 曲线（伏安曲线）进行指数拟合，并计算玻尔兹曼常数 k。

（1）首先将要拟合的数据按行或列的方式写入 EXCEL，本实验要拟合的曲线为 IF-UF，实验数据如图 1-3 所示。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	序号	1	2	3	4	5	6	7	8
2	UF/V	0.350	0.360	0.370	0.380	0.390	0.400	0.410	0.420
3	IF/V	0.016	0.024	0.035	0.050	0.073	0.107	0.158	0.229
4	序号	9	10	11	12	13	14	15	16
5	UF/V	0.430	0.440	0.450	0.460	0.470	0.480	0.490	0.500
6	IF/V	0.334	0.483	0.668	0.964	1.390	1.970	2.910	4.240
7	序号	17	18	19	20	21	22	23	24
8	UF/V	0.510	0.520	0.530	0.540	0.550	0.560	0.570	0.580
9	IF/V	6.160	8.890	13.200	19.100	28.600	41.900	61.800	89.800

图 1-3　IF-UF 实验数据

（2）选择【插入】→【图表】，弹出如图 1-4 所示对话框，在左上方【标准类型】菜单里的【图表类型（C）】下选择【XY 散点图】，在【子图表类型（T）】里选择【无数据点平滑线散点图】，然后单击【下一步（N）】。

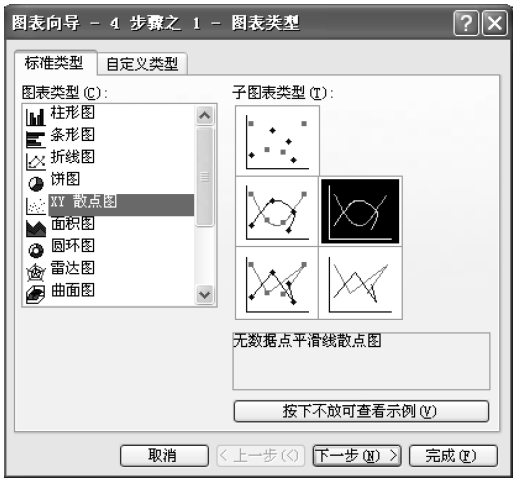


图 1-4　图表类型对话框

（3）弹出如图 1-5 所示对话框，选择左上方的【数据区域】菜单，在【系列产生在】下选择【行（R）】。

图 1-5　图表源数据对话框

如图 1-6 所示，选择该对话框中左上方的【系列】菜单，在【系列（S）】下点【添加】，在【名称（N）】里填写“PN 结伏安特性曲线”，在【X 值（X）】里选择 UF 的数据，在【Y 值（Y）】里选择 IF 的数据，单击【下一步】。

图 1-6　源数据对话框

（4）弹出如图 1-7 所示对话框，在【标题】菜单下的【图表标题（T）】中写“PN 结伏安特性曲线”，在【数值（X）轴（A）】中写“UF/V”，在【数值（Y）轴（V）】中写“IF/μA”。

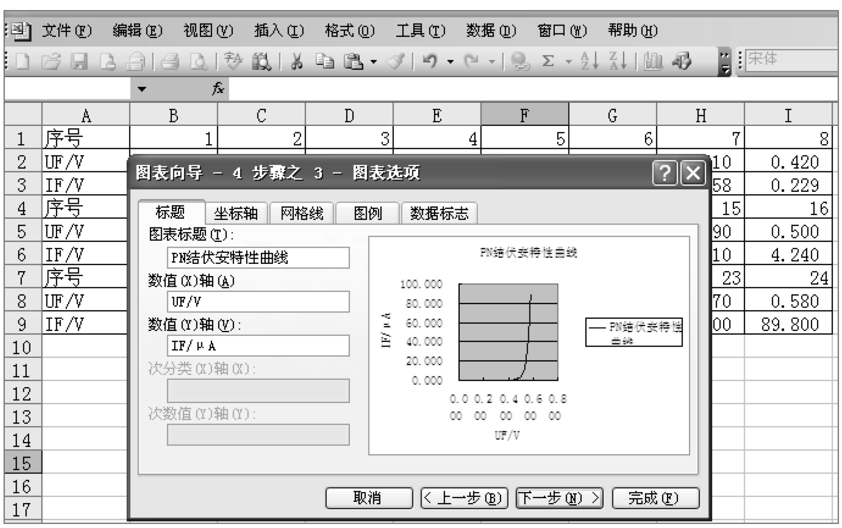


图 1-7　图表选项对话框一

如图 1-8 所示，在【网格线】菜单下的【数值（X）轴】中勾选“主要网格线”和“次要网格线”，单击【下一步】。

图 1-8　图表选项对话框二

（5）弹出如图 1-9 所示对话框，直接单击【完成】，就生成如图 1-10 所示曲线图。

图 1-9　图表位置对话框

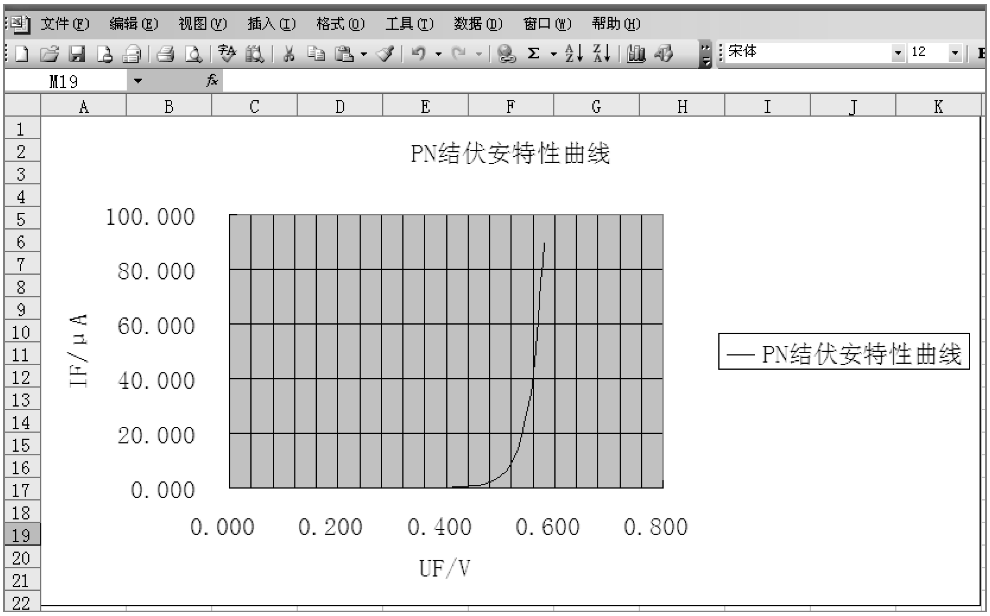


图 1-10　PN 结伏安法特性曲线

（6）选中图 1-11 中的曲线，右键选择【添加趋势线】，弹出下列对话框，在左上方【类型】菜单下的【趋势预测/回归曲线类型】中选择【指数】。

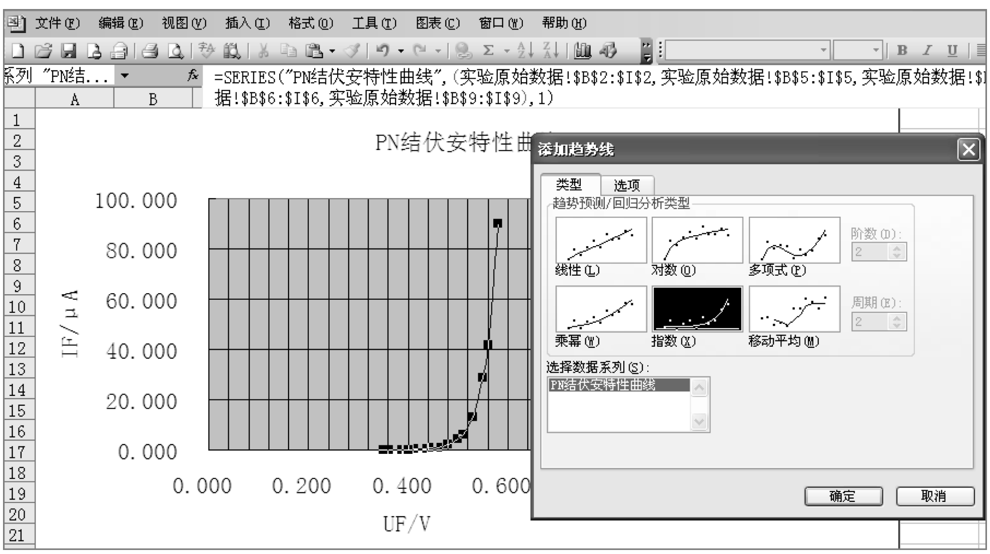


图 1-11　添加趋势线对话框

在【选项】菜单下的【趋势线名称】中填写“PN 结伏安特性指数回归曲线”，在【趋势预测】中勾选“显示公式”和显示 R 平方值（图 1-12），单击【确定】。

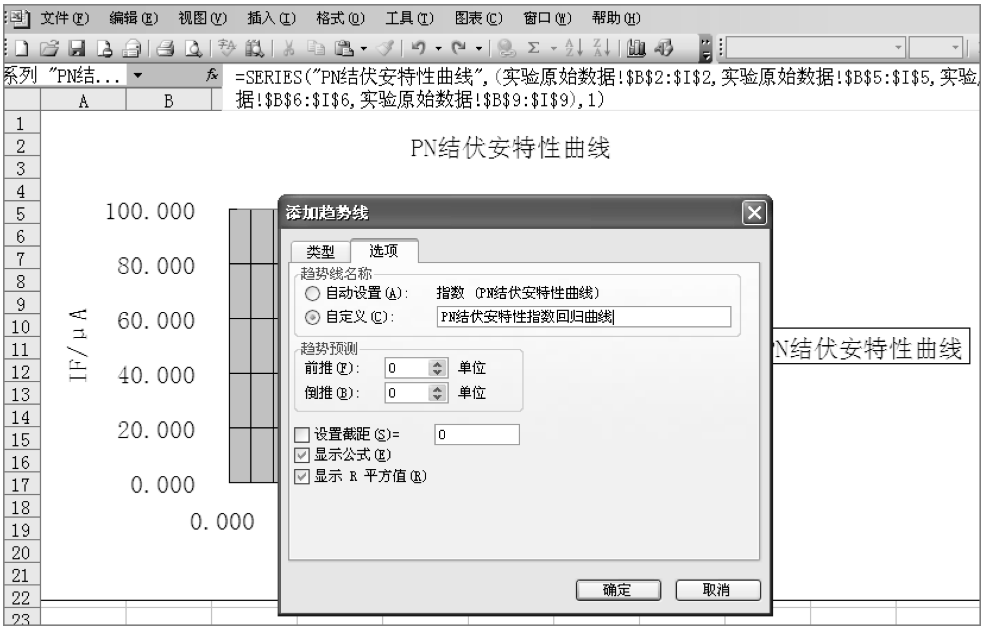


图 1-12　选项对话框

(7) 右键单击生成的公式，选择【数据标志格式】，弹出如图 1-13 所示对话框，选择【数字】菜单中的【科学计数】，设置【小数位数】为 3 位，单击【确定】，完成。

图 1-13　选项对话框

图 1-14 所示为效果图，其中 A=35.8 μA，B=37.24。

根据 $B = q/kT$ 可以求到玻尔兹曼常数

$$k = 1.6 \times 10^{-19}/(37.24 \times 294.3) = 1.46 \times 10^{-23}$$

$$E_P = \frac{|k' - k|}{k} \times 100\% = 5.75\%$$

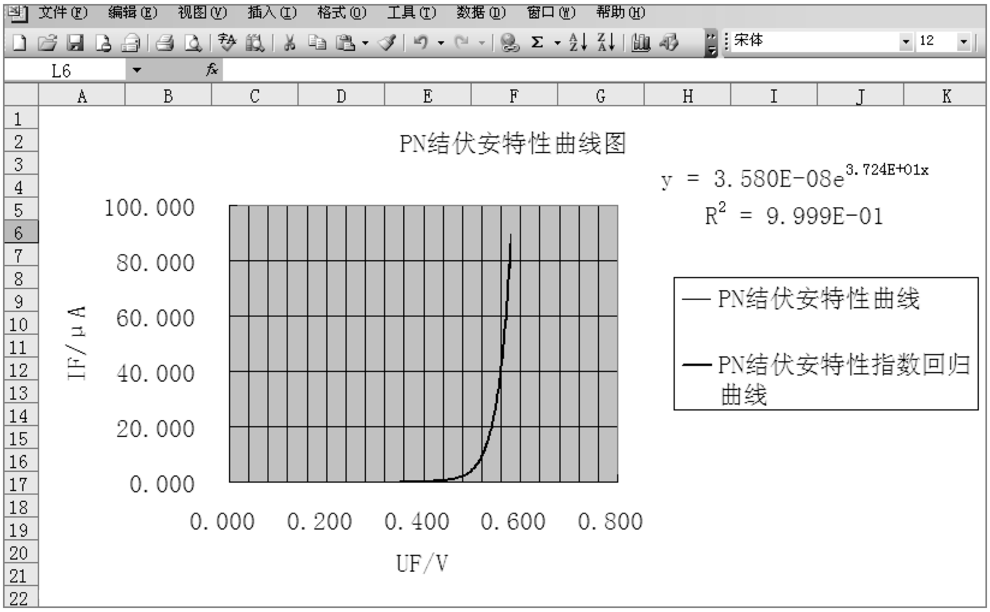
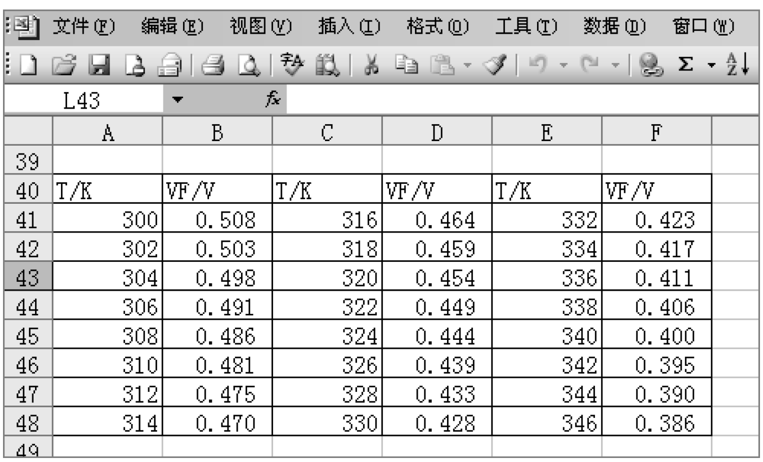


图 1-14　PN 结伏安法特性曲线与指数回归曲线

2. 用 EXCEL 对 VF-T 曲线进行线性拟合，并计算灵敏度 S。

与 PN 结伏安特性指数回归操作方法类似，只要将指数回归改为线性回归即可。图 1-15 是 VF-T 实验数据。



T/K	VF/V	T/K	VF/V	T/K	VF/V
300	0.508	316	0.464	332	0.423
302	0.503	318	0.459	334	0.417
304	0.498	320	0.454	336	0.411
306	0.491	322	0.449	338	0.406
308	0.486	324	0.444	340	0.400
310	0.481	326	0.439	342	0.395
312	0.475	328	0.433	344	0.390
314	0.470	330	0.428	346	0.386

图 1-15　VF-T 实验数据

图 1-16 所示为 VF-T 线性回归曲线效果图，其中 $A=-2.67\times10^{-3}$，$B=1.309$，所以 $S=-2.671$ mV/℃。

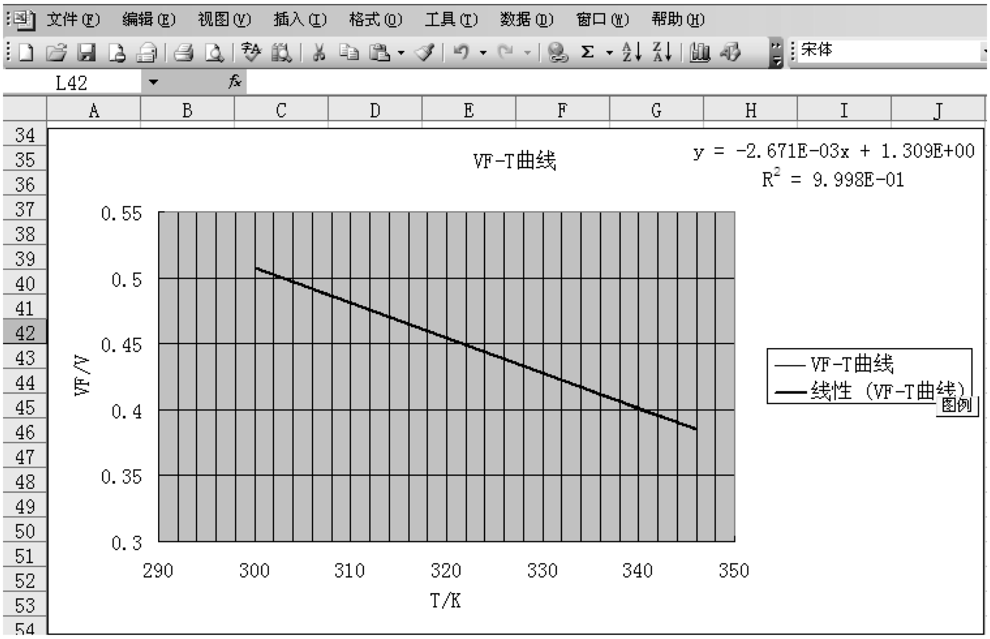


图 1-16　线性回归曲线效果图

第八节　实验方法论

历史上，自然科学家都十分重视实验方法的研究。许多物理研究工作者在取得科研成果的同时，也创造出了引人瞩目的方法论，这是人类宝贵的精神财富。爱因斯坦指出，在衡量人才的贡献时，主要看他们在自己的一生中“想的是什么和他怎样想的”。也就是说，既要关注人才向社会提供的物质成果，更要关注从他们那里吸取科学的思想方法及思维的艺术。物理学发展的历史已经充分证明，每一次物理学上的重大发现，往往伴随着实验思想的重大突破。物理实验大师的那些深刻的设计思想、精巧的实验方法，是人类认识未知世界的锐利武器和宝贵财富。

一、物理实验方法的特点

每一个物理实验都具有自身的一套方法用来测量相关的物理量。物理实验方法是人们根据一定的目的和计划，利用物理仪器和设备，人为地控制或模拟物理现象，排除各种偶然、次要因素的干扰，突出主要因素，在有利条件下重复地研究物理现象及探究其规律。

（一）物理实验方法的简化和纯化

自然界的事物和现象是复杂的，不仅自身表现出各种各样的相互交织现象，而且还同周围环境相互作用、相互影响，单凭经验观察无法弄清其中起主导作用的因素。实验设计

时应根据实际研究的需要，借助精密的仪器，严格控制实验条件，排除各种偶然的、次要的、外界的干扰因素，把自然过程加以简化和纯化，以求达到实验目的。

（二）物理实验方法可以强化研究条件

在常态下自然界的一些事物和现象不易暴露其特性和规律，只有当它处于某种极限条件下才能显示出其特殊的规律性。在物理实验中人们可以利用各种实验方法，创造出在自然状态下所没有的，或者自然界无法控制而在生产过程中又难以实现的某些特殊的极限条件，如超高温 、超低温 、超高压、超高真空、超强磁场等。这样就能使物质变化过程向着指定方 向强化，从而可发现许多有重大意义的新现象和新事实。

（三）实验方法可以模拟、加速或延缓物理过程

运用物理实验方法，可主动地控制研究对象及其发展变化过程，它可以对不可接近的自然现象进行间接研究，使其变化过程加速进行或延缓放慢，从而扩大研究对象的时空范围，给研究者带来方便。

（四）物理实验方法可以再现和重复物理过程

再现与重复是物理实验方法的基本要求。无论采用什么样的实验方法，实验都必须能够再现。在相同的实验条件下，重复做此项实验，应该得出相同的实验结果。所以任何一项实验报告，除了列出实验数据、实验结果外，还必须写出实验的时间、条件，以便重复进行实验 。这样才保证了物理学理论具有描述、解释和预测自然的能力，才能显示出科学的意义。下面就几种常用的实验方法做简要的介绍。

二、物理实验的基本实验方法

（一）比较法

比较法是最基本、最重要的测量方法之一。所谓比较法是将待测量与同类物理量的标准量或标准仪器直接或间接地进行比较，测出其量值。天平是测量质量的仪器。测量质量的过程，实际上是把未知的质量与标准质量进行比较的过程。电学中用惠斯通电桥测电阻的实验也是把未知电阻与标准电阻进行比较。虽然，天平是力学仪器，电桥是电学仪器，而且两者的原理也不相同，但天平和电桥在物理实验过程中取得数值的构思方法却是相同的。

（二）转换测量法

转换测量法主要是寻求物理量之间的相互关系，一般可分为参量转换测量法和能量转换测量法。

1. 参量转换测量法

利用物理量之间的某种变换关系，以达到测量某一物理量的方法称为参量转换测量

法。这种方法可以把不可测的量转换成可测的量，把测不准的量转换成可测准的量，用应测量物理量的关系量代替应测量的物理量，把单个测量点的计算方法用多个测量点的作图法代替。例如力学实验中测量钢丝的杨氏模量 E，是以应变与应力成线性变化的规律，将 E 的测量转换成对应力 F/S 和应变 $\Delta L/L$ 的测量后得到 $E=\dfrac{F/S}{\Delta L/L}$。

2. 能量转换测量法

能量转换测量法是利用物理学中的能量守恒定律以及能量形式上的相互转换规律进行转换测量的方法。实现能量转换的器件称为传感器。例如用热电偶测量温度，是利用材料的温差电动势原理，将温度测量转换成对热电偶的温差电动势的测量，它属于热电换测法。此外，实验中还常用到压电换测法（压力和电势间的变换，如话筒和扬声器）、光电换测法（光信号转换为电信号，如光电管、光电池、光敏二极管等器件）及磁电换测法（磁学量与电学量的转换，如霍尔元件）等。

（三）放大法

1. 积累放大法

在物理实验中我们常常会遇到这样一些问题，即受测量仪器的精度的限制，或存在很大的噪声，或受人的反应时间限制，单次测量的误差很大或者无法测量出待测量的有用信息。这时，我们可以采用积累放大法来进行测量，就可以减少测量误差、降低噪声和获得有用的信息。例如力学实验中单摆测重力加速度实验中的周期测量。

2. 机械放大法

机械放大是最直观的一种放大方法，例如利用游标可以提高测量的精细程度，原来分度值为 y 的主尺，加上一个 n 等分的游标后，组成的游标尺的分度值 $\Delta y=y/n$，即将 y 的精度扩大了 n 倍，直游标和角游标都是这种机械放大。螺旋测微原理也是一种机械放大，通过螺纹将纵向的微小变化放大成圆周方向上的较大变化。

3. 电信号的放大和信噪比的提高

电信号的放大可以是电压放大、电流放大 、功率放大，电信号可以是交流的或直流的。随着微电技术和电子器件的发展，各种电信号的放大都很容易实现，因而也是使用最广泛最普遍的。

4. 光学放大法

光学放大的仪器有放大镜、显微镜和望远镜。这类仪器只是在观察中放大视角，并不是实际尺寸的变化，所以并不增加误差。因而许多精密仪器都是在最后的读数装置上加一个视角放大装置以提高测量精度。微小变化量的放大原理常用于检流计、光杠杆等装置中。

（四）模拟法

在物理实验中，若有两个物理实验的现象和过程具有相似性质，服从同一自然规律，

满足同一边值条件，就可以利用其相似性研究其中一个现象以代替另一个现象的研究，得到的结果是相同的，这种方法称为模拟法。

一般而言，人们往往用性质相似而易测量的物理量代替不易测量的物理量进行研究。模拟法是指不直接研究自然现象或过程的本身，而用与这些现象或自然过程相似的模型来进行研究的一种方法，模拟可分为物理模拟和数学模拟，随着计算机的发展又有了计算机模拟实验的方法。物理模拟是保持同一物理本质的模拟（如用直流电场模拟静电场）；数学模拟是指把两个不同本质的物理现象或过程，用同一个数学模型来模拟；计算机模拟实验系统通过解剖教学过程，使用键盘和鼠标控制仿真仪器画面动作来模拟真实实验仪器，完成各种模块中相应的内容。在软件设计上把完成各种模块中的内容看作是问题空间到目标空间的一系列变化，从此变化中找到一条达到目标的求解途径，从而完成仿真实验过程。此方法利用计算机来丰富实验教学的思想、方法和手段，改革传统实验教学模式，使实验教学与高新科学技术协调地发展，提高实验教学水平。具体的方法见书中相关的实验。

（五）补偿法

补偿法是使用被测量的作用在测量过程中抵消，使得表示标准量与被测量的作用之差量值的仪表示数为零，它是大学物理实验中应用较广的方法。比较常见的补偿法有电压补偿法、长度补偿法、光程补偿法、温度补偿法等。比如在用伏安法测电阻的实验中，为减小系统误差，通常采用电压补偿法。

在具体的实验中，往往将各种方法综合起来应用，因此物理实验思想方法应贯穿于教学的始终、教学的各个环节。实验者只有对各种实验思想方法有深刻的了解，才能在未来的实际工作中得心应手地综合应用。

第九节　设计性实验的设计方法

所谓设计性物理实验，就是让学生应用所学的知识，根据指导教师提供的实验题目，自主查阅参考资料，根据已有的实验条件，自主设计实验方案，自选或组装实验设备，自拟实验操作步骤，在规定的时间内完成的实验。学生做完实验后，以小论文的形式写出完整的实验报告，对实验结果进行系统地分析和总结，让学生得到一次科学实验过程的基本训练。物理实验由实验目的、实验原理、实验方法、实验仪器等要素构成，针对每一要素，都可进行设计。

一、设计性物理实验的设计内容

（一）对实验目的的设计

实验目的是一个实验中最重要的要素，它决定了实验的方向，对其他要素有重大影响。一个物理过程往往是很复杂的，具有很多侧面，对于物理过程的“次要”侧面的研究

往往也能得到重要的结论。比如在赫兹验证电磁波的存在的实验中，赫兹本来的实验目的是验证电磁波的存在，在得到肯定的结论的同时，他发现了实验目的之外的新的物理现象——光电效应。对于传统物理实验讲义中的“经典”实验，也可以对实验目的进行设计，比如定性观察实验可以改为定量研究实验、改变测量实验的被测量等。

（二）对实验原理的设计

实验原理是实验中蕴涵的物理规律，是一个实验的“软件”部分。对实验原理的改进可在降低实验成本的情况下更有效率地达到实验目的。比如真空中光速的测量可用最早的天文学方法，也可用现代的激光测量法。一般而言，实验原理的设计自由度比较大，实验室能具备相应的实验仪器即可。

（三）对实验方法的设计

针对相同的实验原理可选择不同的实验方法，如同样是基于欧姆定律的伏安法测电阻，就有内接法和外接法。实验方法决定了实验的“框架”和“工艺”。实验方法的设计是实验研究中最能培养人的想象力与创造性思维能力的领域之一。实验方法的选择往往是决定实验能否成功的关键。物理实验思想的形成和实验方法的设计是大学物理实验教学的核心，因此依据同一原理而采用不同的实验方法来进行物理实验设计能极大地提高学生发散思维的能力，培养其丰富的想象能力及创造能力。

（四）对实验仪器的设计

实验原理的贯彻和实验目的的实现都是通过实验仪器装置来得以完成的。仪器装置是物理实验“硬件”部分。对实验仪器装置的改进与创新一直是设计性物理实验的重要内容，可以说有些物理实验的设计过程就是探寻和组装恰当可行的仪器装置的过程。

二、设计性物理实验的指导原则

设计性物理实验的主体是学生，要充分激发学生的积极性，引导他们去探索，综合利用已掌握的一切知识和技能，勇于创新。在教学过程中教师的作用主要是引导和服务，对学生的设计进行评价和把关，具体指导原则如下。

（一）对学生的设计的科学性、可行性进行判断

科学性是指实验设计在科学原理和科学方法上是否有错误。可行性是指由实验原理和实验方法所决定的实验仪器、实验环境能否得到满足，实验难度是否得当。对于错误的或不佳的设计要向学生指出原因，并鼓励学生改进原来的设计。

（二）实验场地、仪器、时间、资料的开放

教学场地及设备的开放是保证设计性物理实验良好并顺畅进行的重要条件。实验室应提供必要的实验资源，包括资料、场地、仪器、辅导教师和灵活的时间，否则设计的自由

度就会受到限制。

（三）尊重学生的设计

由于自身知识和经验等多方面的限制，学生的设计往往与教师所认为的“完美”设计相差甚远，这是设计性实验过程中常发生的现象。这时教师应平等地和学生交流 ，指出学生设计的缺点，并指明正确的设计方向。

【思考与讨论】

1. 电压表制造厂说明书说明：仪器校准后 1～2 年内，在 IV 示值最大允许误差为 $14\times10^{-6}\times V_X+2\times10^{-6}\times V_m$。设校准后 20 个月在 1 V 内测量电压，在重复性条件下测得电压的平均值 $\overline{V}=0.928\ 571$ V，平均值的标准差为 $S(\overline{V})=12\ \mu V$。试计算出测量结果的扩展不确定度，写出结果表达式。

2. 金属电阻与温度的关系可近似表示为 $R=R_0(1+\alpha t)$，R_0 为 $t=0$ ℃时的电阻，α 为电阻的温度系数。实验数据见表 1-4，试用图解法建立电阻与温度关系的经验公式。

表 1-4　实验数据 1

i	1	2	3	4	5	6	7
t/℃	10.5	26.0	38.3	51.0	62.8	75.5	85.7
R/Ω	10.423	10.892	11.201	11.586	12.025	12.344	12.679

（3）在弹性限度内，弹簧的伸长量 x 与所受的载荷（拉力）F 满足线性关系

$$F=kx$$

实验时等差地改变载距，测得一组实验数据如表 1-5。

表 1-5　实验数据 2

砝码质量/kg	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000
弹簧伸长位置/cm	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8

求每增加 1 kg 砝码弹簧的平均伸长量 Δx。