**第 7 次课 学时 2**

|  |  |
| --- | --- |
| **授课章节内容** | 第五章 单维连续信源与信道 |
|  | 5.1单维连续信源  5.1.1 连续信源的相对熵及数学特性 |
| 5.1.2 几种连续信源的相对熵 |
| 5.1.3 熵功率与信息变差 |
| 5.1.4 相对熵的变换 |
| **教学目标** | 教学目标2，3 |
| **支撑毕业要求** | 毕业要求1-3 |

**教学要求：**

1. 知识目标

* 能正确解释连续信源和信道的含义；
* 能够计算三种特殊连续信源的差熵。
* 理解熵功率与信息变差；了解相对熵的变换。

1. 能力目标

* 具备评估通信系统基本连续信源信息熵的能力

1. 素质目标

* 激发学生对信息论课程的学习热情，锻造抽象思维能力

**教学重点与难点**：

* 基本连续信源相对熵概念，连续信源相对熵的计算

**教学过程设计：**

回顾单维离散信源，然后提出单维连续信源，给出二者的区别与联系

| **讲授与指导内容** | | **讲课、互动内容设计** |
| --- | --- | --- |
| 第5章 单维连续信源与信道  信道输入端是随机波形信源，可用随机过程{*x*(*t*)}来表示，若信道输出也是随机过程{*y*(*t*)}，则对应信道即为随机波形信道。对限时*T*，限频*F*的随机过程，在满足Nyquist抽样定理的情况下，可以完全用*N=2FT*个连续型随机变量，即*N*维连续随机矢量***X***=*X*1*X*2…*XN*来表述和研究，由一个随机变量描述的信源称为单维连续信源，亦称为基本连续信源，是最基本的也是最重要的一种连续信源,对应的信道是单位连续信道。单维连续信源与信道是研究多维连续信源和信道的基础，多维连续信源和信道的讨论将安排在下一章进行。  5.1 单维连续信源  5.1.1 连续信源的相对熵  单维连续信源的概率测度用一维概率密度函数描述，一维连续信源的概率空间为并满足或，其中，(*a,b*)是的取值区间，R表示实数集(-∞, +∞)，*p*(*x*)是X的概率密度函数。  连续变量可用离散变量来逼近，把*X*的取值区间[*a*,*b*]分段，每段长度，得到相应的离散随机变量*X*n和离散信息熵*H*(*X*n)。然后，令，，得到*H*(*X*n)的极限值，就认为是单维连续信源*X*的信息熵*H*(*X*)。  设是[a,b]中的连续概率密度函数。如图5.1所示。    图5.1 连续概率密度函数  用间隔把分割成*n*个等长小区间。落在第个区间的概率    根据积分中值定理，第区间的概率    这样，连续信源转变为一个离散信源    的熵为    进一步，用积分形式将改写为    当，即，得连续信源X的熵为    令上式中  并把称为单维连续信源X的相对熵。则有  {无限大的常数}  相对熵*h*(*X*)是*X*的无限大信息熵中，有确定值部分，不代表连续信源*X*的平均不确定性，也不再具有信息的内涵，但在研究连续信源的平均互信息中将发挥重要作用。  5.1.2 几种连续信源的相对熵  讨论几种最具代表性的连续信源的相对熵。  1. 取值区间为的均匀分布的连续信源的相对熵，均匀分布信源的概率空间为    相对熵为    当时，出现负值，即。这证明，与离散信源的信息熵不同，连续信源的相对熵不具非负性。  2.高斯分布的连续信源*X*的相对熵  均值*m*，方差*σ*2的高斯分布的连续信源*X*的概率空间为    的相对熵    当均值，即不计G-信源中的直流分量时    G-信源的相对熵只决定于G-信源的方差，与均值无关。当均值*m*=0时，只决定于平均功率P。  3.指数分布的连续信源的相对熵  均值为的指数分布的连续信源概率空间为    该信源的均值    相对熵    指数分布的连续信源的相对熵，只取决于信源的均值。  连续信源的相对熵取决于信源自身的统计特性（如均匀分布新源的取值区间，高斯分布信源的方差，指数分布新源的均值），它是信源自身的信息特征参量。  5.1.3 相对熵的数学特性  连续信道的平均交互信息量等于连续信源的相对熵和相对疑义度之差，类似离散信息熵，相对熵也具有极值性和上凸性。这在讨论连续信道的信息传输问题中具有重要作用。  1.相对熵的极值性  设取值于同一区间的两个连续信源，概率密度函数分别为和。利用间隔    把区间分割成个等长小区间，落在每个区间的概率分别简记为和，利用中值定理有  （5.1）  （5.2）  这样，两个连续信源就转变为两个离散的信源      利用公式，可得  （5.3）  将（5.1）和（5.2）式代入（5.3）式，有  （5.4）  当，时，对（5.4）式两边取极限，其不等式仍然成立，其左边得    而右边是    则（5.4）式可以改写为    即有    若把概率密度函数为的单维连续信源的相对熵记为，则有    2.相对熵的凸函数性  现设和是连续信源的两种不同概率密度函数，则有      又设，。定义x的一个连续函数    即是和的一个内插值，有    证明是的另一种概率密度函数  其相对熵    利用相对熵的极值性，有      令    则有    即  根据∩型凸函数定义，连续信源的相对熵是内概率密度函数的∩型凸函数。  5.1.4 最大相对熵定理  不同约束条件，信源的最大相对熵不同。  约束条件一般包括            连续信源差熵的最大值就是若干约束条件下的熵函数的极值。  1.峰值功率受限条件下信源的最大相对熵  若信源峰值功率，即信源输出电压的瞬时值限定在内，等价于信源输出信号电压的幅度受限，限于在内取值，所以相当于求在约束条件下的信源最大相对熵。  定理5.1在峰值功率受限的单维连续信源中，均匀分布的连续信源的相对熵最大。  【证明】设为均匀分布的概率密度函数，并满足。而设为任意分布的概率密度函数，也有。则    因而  即峰值功率受限条件下，均匀分布的相对熵最大。其值为。  2.平均功率受限条件下信源的最大相对熵  此时的约束条件为      总功率包括直流功率和交流功率，总功率受限，交流功率也一定受限。此时，约束条件等价为      定理5.2 方差受限的连续信源中，高斯分布的连续信源的相对熵最大。  【证明】设为信源输出的任意概率密度分布。因为其方差受限为，所以必满足和，又设是方差为的正态概率密度分布，即有和，相对熵为    现计算    所以得    而  根据詹森不等式得    所以得  当且仅当时等式成立。  高斯随机变量的相对熵只取决于方差，当直流功率为0时，最大熵可表示为：    5.1.5 熵功率与信息变差  本节讨论连续信源的剩余度，即信息变差。当一个连续信源输出信号平均功率为时，则高斯信源的相对熵最大，等于。对于非高斯信源，定义熵功率来表达信源的剩余度。  熵功率定义为与这个平均功率为的非高斯信源具有相同熵的高斯信源的平均功率。如果这个信源的熵为，则根据熵功率定义，得到    熵功率为    熵功率永远不会大于信源的真正功率，非高斯信源存在剩余度。将信源输出信号平均功率和熵功率之差定义为连续信源的剩余度。只有高斯信源的熵功率等于实际平均功率，剩余度为零。  类似离散信源信息变差定义，令表示在某种限制条件下，当概率密度函数为时，连续信源到的最大相对熵；表示在同样限制条件下，当是以外的任何一种概率密度函数时，连续信源的相对熵。把和的差    定义为连续信源在这种限制条件下的信息变差。  反之，非高斯信源的熵功率亦可用信息变差描述。    【例5.1】一个平均功率为5W的非高斯信源熵为（比特/自由度），试计算该信源的熵功率和剩余度。  解：一个平均功率为3W的高斯信源的熵为（比特/自由度）  根据熵功率的定义，知该非高斯信源的熵功率    因此该信源的剩余度  5.1.6 相对熵的变换  离散信源通过具有一一对应的确定函数关系变换后，变换前后熵不发生改变，但连续信源相对熵经过变换后不具备此性质。对于如图5.2所示的连续信源坐标变换，有如下定理。    图5.2 连续信源坐标变换  定理5.3 取值区间为，概率密度函数为，相对熵为的连续信号源，经确定的单值函数变换后，连续输出随机变量的相对熵    如下所示，设为一一对应变换    交换前信源的信源定向为：    变换后随机变量的取值区间为，概率密度函数为,则有    是雅可比行列式的绝对值。故得的概率密度函数    一般情况下，，说明，变换后概率密度函数发生改变。  利用性质    和  得到变换后输出随机变量Y的熵    经过坐标变换系统，引起相对熵的变化，其变化量等于雅可比行列式绝对值的对数，在原坐标系统中的统计平均值，这也是取名为相对熵的重要原因之一。  【例5.2】图5.3中信息变换装置的变换函数关系是  连续信源在整个实轴:取值，其概率密度函数为    试求信息变换装置输出连续随机变量的概率密度函数和相对熵    图5.3信息变换装置  解：由，得  则雅可比行列式绝对值  输出随机变量的概率密度函数    连续信源Ｘ的连续熵    输出连续随机变量的连续熵    表明输出相对熵只与系统增益有关。 | | 注意：单符号离散信源、单符号连续信源的区别和联系  掌握绝对熵与差熵的区别  重点掌握高斯分布连续信源的相对熵  相对熵的特性需要了解  最大相对熵定理需要掌握，这对后面著名香农公式的推导有重要作用  熵功率与信息变差是难点，需要慢讲。  这部分内容需要与离散信源熵变换对比讲授 |
| **小结** | 连续信源差熵的含义；计算三种特殊连续信源的差熵。  熵功率、信息变差、相对熵的变换特性。 | |
| 复习要点 | 掌握连续信源差熵的物理含义；能够计算三种特殊连续信源的差熵。  了解熵功率、信息变差、相对熵的变换特性。 | |
| 作业题 | 5.5 | |

作者签名：

****