**第 6 次课 学时 2**

|  |  |
| --- | --- |
| **授课章节内容** | 第三章 多符号离散信源与信道 |
|  | 4.6扩展信道及其数学模型 |
| 4.7无记忆扩展信道 |
| 4.8扩展信道的平均交互信息量 |
| 4.9无记忆扩展信道的信道容量 |
| 4.10独立并联信道的信道容量 |
| **教学目标** | 教学目标3 |
| **支撑毕业要求** | 毕业要求1-3 |

**教学要求：**

1. 知识目标

* 信道扩展及容量计算
* 串联信道与并联信道
* 数据处理定理

2. 能力目标

* 区分串联信道和并联信道
* 能够掌握信源与信道匹配的含义，并能充分理解各类信道的信息传输能力

1. 素质目标

* 通过分析和计算信道传输信息量，培养独立分析和解决问题的探究精神。

**教学重点与难点**：

* 多符号信道的建模与容量计算

**教学过程设计：**

* 前面讨论了最简单的离散信道，即信道的输入和输出都只是单个随机变量的信道。然而一般离散信道的输入和输出却是一系列时间(或空间)离散的随机变量，即为随机序列。本节讨论多符号离散信道的数学模型及容量计算。

**教学方法及手段：**

PPT为主，例题，板书为辅。

| **讲授与指导内容** | | **讲课、互动内容设计** |
| --- | --- | --- |
| 4.7 扩展信道及其数学模型  设单符号离散信道的输入符号集X:{a1,a2,…,a*r*}、输出符号集Y:{b1,b2,…,b*s*}、传递概率*P*(*Y*/*X*):{*P*(*bj*/*aj*)(*i*=1,2,…*r*;*j*=1,2,…*s*)}。现将离散平稳信源X:{a1,a2,…,a*r*}的*N*次扩展信源*X*=*X*1*X*2…*XN*与该信道相接，如下图4.3所示。    图4.3单符号离散信道模型  那么，信源所发出的消息是如何通过信道进行传输的呢？  从运行机制上来看，在时刻，随机变量通过信道，相应输出随机变量；在时刻，随机变量通过信道，相应输出随机变量；...；在时刻，随机变量通过信道，相应输出随机变量。在*N*个单位时刻，信道（X-Y）连续运行了*N*次。从总体的传输效果和传递作用上来看，输入了一个由N个随机变量组成的随机矢量，相应输出了一个由N个随机变量组成的随机矢量。输入随机矢量和输出随机矢量之间，似乎形成了一个新的“信道”，这种“信道”称为单符号离散信道（X-Y）的*N*次扩展信道（**X-Y**），如下图4.4所示。    图4.4扩展信道模型  扩展信道的信道转移概率矩阵为    4.8 无记忆扩展信道  若N次扩展信道的传递概率，等于*N*个时刻单符号离散信道（X-Y）的传递概率的连乘，即    即    则单符号离散信道（X-Y）称为离散无记忆信道，相应的N次扩展信道（**X-Y**）称为离散无记忆信道（X-Y）的*N*次扩展信道。  离散无记忆信道（X-Y）的*N*次扩展信道（**X-Y**）在时刻的输出随机变量，只与该时刻*k*的输入随机变量有关，与*k*时刻之前的输入随机变量序列和输出随机变量序列无关。离散信道具有“无记忆”性。即    离散无记忆信道（X-Y）的*N*次扩展信道（**X-Y**）在时刻的输出随机变量序列，只与时刻的输入随机变量序列有关，与下一时刻的输入随机变量序列无关。离散无记忆信道具有“无预感”性。即    【例4.8】试写出二进制对称离散无记忆信道的N=2次扩展信道的数学模型  解：设二进制对称信道矩阵为，令，，，；，，，。二次扩展信道输入为，输出，  的取值为，  的取值为，  则二次扩展信道的信道矩阵为    原信道及扩展信道的信道传递概率图，如图4.5和4.6所示。    图4.5原信道 图4.6扩展信道  4.9 扩展信道的平均交互信息量  *N*次扩展信道(***X***-***Y***)的平均交互信息量*I*(***X***;***Y***)，必然与信源***X***=*X*1*X*2…*X*N各时刻的随机变量*Xk*(*k*=1,2,…,N)单独通过信道(*X*-*Y*)的平均交互信息量*I*(*X*k;*Yk*) (*k*=1,2,…,N)的和有关。  根据平均交互信息量的一般定义，可得图4.7所示N次扩展信道(***X***-***Y***)的平均交互信息量的三种表达式      图4.7扩展信道模型  定理4.4 一般离散信道中，设，，其中  ，  且有  当信道是无记忆的，即信道传递概率满足    则有  （4.8）  当信道的输入信源是无记忆的，即满足    则有  （4.9）  当信道和信源都是无记忆时，上述两条件都满足  则有  （4.10）  【证明】（1）设信道输入和输出随机序列和的一个取值为，，和，。根据平均互信息的定义得和的平均互信息    式中，表示在的联合空间中求统计平均。因信道是无记忆的，得    另一方面    上式也是对的联合空间求均值。所以    根据詹森不等式，得    证得  当信源是无记忆时，则有    而    因此式（4.8）等号成立。  （2）根据平均互信息定义得和的平均互信息    式中，和是随机矢量和的一个取值，，，和，。因信源是无记忆的，即随机序列中每一分量是相互独立的，因而    因此得    式中，表示对的联合空间求均值。  另一方面    上式也是对的联合空间求均值。所以    根据詹森不等式，得  证得    即    当信道是无记忆时，有    及    因此得  所以式（4.9）的等号成立。  （3）从上述（1）和（2）的证明中可知，若信源与信道都是无记忆的，则式（4.8）和式（4.9）同时满足，即它们的等式成立    上述证明也可以运用平均联合互信息和平均条件互信息的表达式来证明。  特别地，当*Xi*(1,2,…,N)取自于同一符号集且概率分布相同，*Yi*(1,2,…,N)也取自同一符号集。则有    当信源和信道都无记忆时，有    4.10 无记忆扩展信道的信道容量  当N次扩展信道无记忆时，根据上节定理，有  （4.11）  如果*Xi*(*i*=1,2,…,*N*)和*Yi*(*i*=1,2,…,*N*)取值分别来自同一符号集，且各自概率分布相同。（4.11）变为    只有当信源是离散平稳无记忆信源，上式取等号。  根据信道容量定义    这个定理说明，离散无记忆信道的*N*次扩展信道的信道容量*CN*，是离散无记忆信道本身容量C的*N*倍。它的匹配信源要具备两个条件：其一，必须是离散无记忆信道本身的匹配信源；其二，这个匹配信源在*N*个单位时间统计独立地发出符号，形成无记忆匹配信源的*N*次扩展信源。这样的扩展信源才是离散无记忆信道N次扩展信道的匹配信源。  【例4.9】求信道矩阵为的三次扩展信道的信道容量。  解：基本信道是一个对称信道，其信道容量  (bit/符号)  三次扩展信道的信道容量为  (bit/序列)  4.11 独立并联信道的信道容量  单符号离散信道(*X*-*Y*)的*N*次扩展信道(***X***-***Y***)是同一单符号离散信道(*X*-*Y*)在*N*个单位时间相继运行*N*次所形成的总体传递作用。  如图4.8所示，*N*个信道的输入随机变量*X*1*X*2…*XN*构成输入随机矢量***X***=*X*1*X*2…*XN*，随机变量*X*1:{*a*11,*a*12,…,*a*1*r*}通过（1）信道，输出随机变量*Y*1:{*b*11,*b*12,…,*b*1*s*}；随机变量*X*2:{*a*21, *a*22,…,*a*2*r*}通过（2）信道，输出随机变量*Y*2:{*b*21,*b*22,…,*b*2*s*}；；随机变量*XN*:{*aN*1,*aN*2,…,*aNr*}通过（*N*）信道，输出随机变量*YN*:{*bN*1,*bN*2,…,*bNs*}。在输出端，相应出现输出随机变量*Y*1*Y*2…*YN*，构成输出随机矢量***Y***=*Y*1*Y*2…*YN*。这种把随机矢量***X***=*X*1*X*2…*XN*传递输出随机矢量***Y***=*Y*1*Y*2…*YN*的新信道称之为并列信道。  图4.8并联信道模型  由于各信道统计独立，所以由*N*个信道组成的独立并列信道的联合平均交互信息量*I*(***X***;***Y***)=*I*(*X*1*X*2…*XN*; *Y*1*Y*2…*YN*)，小于（或等于）各信道自身平均交互信息量之和，即    当且仅当输入随机变量*X*1*X*2…*XN*之间统计独立时，即有    根据信道容量的一般定义，独立并列信道的信道容量    实践：质点在图上的随机游动  考虑如图4.9的随机游动：    图4.9 随机游动  计算平稳分布，熵率为多少？  假定过程是平稳的，求互信息。  本章要点  1.定义:离散平稳信源  对于任意的，随机变量序列***X***=*X*1*X*2…*XN*的概率分布*p(X*1*X*2…*XN*)与时间起点无关。  2.离散平稳无记忆信源的熵    3.离散平稳有记忆信源的熵    4.离散平稳信源的性质  ①条件熵随N的增加是非递增的。  ②*N*给定时，平均符号熵≥条件熵，即  ③平均符号熵随N的增加是非递增的。  ④离散平稳信源的极限熵  5.（m+1）维离散平稳信源的极限熵    6.马尔科夫信源的熵    7.信源的剩余度    8.N次扩展信道（**X-Y**）的平均交互信息量    9.无记忆信源和无记忆信道条件下的信道容量 | | 此部分内容讲解注意让学生了解以单符号离散信道为基础。  给出单符号离散无记忆信道与其扩展信道的区别于联系  这些公式证明，具有共性，都是利用詹森不等式  通过上面的推导，扩展信道的信道容量计算便水到渠成  一般来说，独立并联信道，其本质是无记忆扩展信道  该实践项目有助于培养学生如何通过现象提炼科学问题的能力，请同学们查阅资料，课外完成该实践项目  简要回顾本章核心知识点 |
| **小结** | 通过对离散无记忆信道引出串联信道和并联信道并学会计算其信道容量，信源与信道匹配概念。 | |
| **复习要点** | 多符号离散信道概念及信道容量计算 | |
| **思考题** | 1.对于多符号离散信道来说，N次拓展信道的互信息与其各个随机信道的平均互信息之间存在怎样的关系? | |
| **作业题** | 4.8 | |

作者签名：

****