**第 5次课 学时 2**

|  |  |
| --- | --- |
| **授课章节内容** | 第四章 多符号离散信源与信道 |
|  | 4.1离散平稳信源的数学模型 |
| 4.2离散平稳无记忆信源的信息熵 |
| 4.3离散平稳有记忆信源的信息熵 |
| 4.4离散平稳有记忆信源的极限熵 |
| 4.5信源的剩余度 |
| **教学目标** | 教学目标3 |
| **支撑毕业要求** | 毕业要求1-3 |

**教学要求：**

1. 知识目标

* 了解多维离散信源。
* 学会计算各种多维离散信源的熵

2. 能力目标

* 能够对实际离散信源所含有的熵进行估算

1. 素质目标

* 结合思政教育，具备寻找问题关键点的能力。

**教学重点与难点**：

* 各种离散信源熵的计算。

**教学过程设计：**

* 说清楚单符号离散信源如何过渡到多符号离散信源，然后给出平均符号熵的定义与计算

**教学方法及手段：**

PPT为主，例题，板书为辅。

| **讲授与指导内容** | | **讲课、互动内容设计** |
| --- | --- | --- |
| 第4章 多符号离散信源与信道  本章首先讨论用离散随机变量序列表征的信源熵的计算，包括离散平稳无记忆信源，离散平稳有记忆信源和马尔柯夫信源，然后进一步从信道输入输出符号统计关联的角度讨论多维信道的信息传输特证。  4.1 离散平稳信源的数学模型  4.1.1 离散平稳信源的数学定义  离散信源输出长度为*N*的随机变量序列***X***=*X*1*X*2…*XN*，其中*l*时刻输出的符号用随机变量*Xl*(*l*=1,2,…,*N*)表示，通常认为在每个时刻*xl*(*l*=1,2,…,*N*)都取自相同的信源符号集{*a*1,*a*2,…,*a*q}，即*xl*∈*Xl*={*a*1,*a*2,…,*aq*}，*l*=1,2,…,*N*。  如果对于任意的*N*，随机变量序列***X***=*X*1*X*2…*XN*的概率分布*p*(*x*1*x*2…*xN*)与时间起点无关，即当*t*=*i*，*t*=*j*(*i*,*j*为任意整数，并且*i*≠*j*)时有          则该信源称为离散平稳信源。  由于联合概率与条件概率有一下关系          因此，对于任意给定的长度L，如果满足            则该离散信源为离散平稳信源。所以，对于平稳信源来说，其条件概率也与时间起点无关。  4.1.2离散平稳信源的数学模型  设信源输出为N长随机矢量***X***=*X*1*X*2…*XN*，***X***矢量中的每一个变量取值于同一符号集*X*:{*a*1,*a*2,…,*ar*}，则N长矢量共可输出*rN*种消息，即，  *N*维平稳信源***X***=*X*1*X*2…*X*N，是原始平稳信源的*N*次扩展信源。    其中，              4.2 离散平稳无记忆信源的信息熵  若平稳信源X:{a1,a2,…,a*r*}的*N*次扩展信源***X***=*X*1*X*2…*XN*中，各时刻随机变量*XK*之间相互统计独立，则信源X称为离散平稳无记忆信源，***X***称为*X*的*N*次扩展信源。其概率分布满足    即    定理4.1 离散平稳无记忆信源信源X:{a1,a2,…,ar}的N次扩展信源***X***=*X*1*X*2…*X*N的信息熵H(XN)是离散平稳无记忆信源信源X的信息熵H(X)的N倍。  【证明】    根据信源的平稳性，有    故有    【例4.1】设离散平稳无记忆信源*X*的概率空间为    试求该信源的二次扩展信源*X*2=*X*1*X*2的熵  解：(bit/符号)  (bit/消息)  4.3 离散平稳有记忆信源的信息熵  根据前面讨论，随机矢量***X***=*X*1*X*2…*XN*的熵为    平均符号熵定义为平均每个信源符号包含的信息量    对于*N=m+1*维离散平稳信源，其含义为信源某时刻发出什么符号只与前面发出的*m*个符号有关联，而与更早时刻发出的符号无关，即*m*+1维离散平稳信源在满足平稳条件下，还满足    特别地，对于最有代表性的二维离散平稳信源，需要满足两个条件  ➀平稳。即      ➁信源发出的符号只与前一个符号有关。即    4.3.1二维离散平稳信源的条件熵  由离散平稳信源的定义，可以证明二维离散平稳信源的条件熵满足    特殊地    为了简单起见，下面只对上式做证明  【证明】    因为平稳，而且发出的符号只与前一个符号有关，所以    又因为，所以    4.3.2（*m*+1）维离散平稳信源  由（*m*+1）维离散平稳信源的定义，可以证明得到条件熵。    【例4.2】设有二维离散平稳信源，单符号信源的概率空间为    假设信源发出的符号只与前一个符号有关，其条件概率如下表所示   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  | |  |  |  |  | |  |  |  |  | |  |  |  |  |   试计算：（1）条件熵和  （2）条件熵  解：(1) (bit/符号)  (bit/符号)  （2）因为平稳，而且发出符号只与前一个符号有关，故有  (bit/符号)  4.3.3二维离散平稳信源的平均符号熵  二维平稳信源输出的无限长序列可按每两个为一组进行划分，并假定组与组之间统计独立。则序列熵可表示为    显然，对于有限序列熵可以通过近似求得。  实际上组与组之间是统计关联的，但仅忽略掉“前一组末尾上的一个符号和后一组开头的一个符号之间的关联性”，不难理解，当*N*→∞时，*N*次扩展信源的平均符号熵就是离散平稳信源的实际熵。  【例4.3】对例4.2中的二维离散平稳信源输出的符号序列分组，每*N*个符号一组且忽略组与组之间关联性，即假定组与组之间是统计独立的。当*N*=1.2,100，∞时，计算*N*次扩展信源的平均符号熵。  解：（1）当*N*=1时，*N*次扩展信源的平均符号熵（即单符号信源熵）  (bit/符号)  （2）当N=2时，N次扩展信源的平均符号熵  (bit/符号)  （3）当N=100时，N次扩展信源的平均符号熵    因为平稳，而且发出的符号只与一个符号有关，所以        所以N次扩展信源的平均符号熵  (bit/符号)  （4）假设符号序列长度N→，则N次扩展信源的平均符号熵（二维离散平稳信源的极限熵）    由上例容易验证以下结论。   1. 二维离散平稳信号的极限熵      1. 条件熵和平均符号熵之间的关系为     ③随着*N*的增加，*N*次扩展信源的平均符号熵*HN*(***X***)递减。  4.4 离散平稳有记忆信源的极限熵  一般离散平稳信源的符号之间的依赖关系是延伸到无穷的。前面通过分析得出了最简单、最具代表性的二维平稳信源的极限熵*H*∞=*H*(X2/X1)，而一般的离散平稳信源的极限熵如何计算呢？对离散平稳信源的性质进行分析，就可以找到答案。  对于离散平稳信源，当*H*(X)<∞时，具有以下几点性质。   1. 条件熵*H*(X*N*/X1X2…X*N*-1)随N的增加是非递增的。 2. N给定时，平均符号熵≥条件熵，即*HN*(**X**)≥*H*(X*N*/X1X2…X*N*-1) 3. 平均符号熵*HN*(**X**)随*N*的增加是非递增的。 4. 离散平稳信源的极限熵   性质①表明，在信源输出序列中符号之间前后依赖关系越长，前面若干个符号发生后，其后发生什么符号的平均不确定性就越小。也就是说，条件较多的熵必小于或等于条件较少的熵，而条件熵必小于或等于无条件熵。例如：    性质②表明，“只考虑组内N个符号之间的关联性的N次扩展信源的平均符号熵”大于或等于“关联性延伸到无穷的平稳信源的条件熵”。例如：  ，  性质③表明，平稳信源的记忆长度N越大，平均符号熵越小。例如    又因为，即有    因此，当记忆长度足够大*N*→∞时，维离散平稳有记忆信源*X*=*X*1*X*2…*XN*的平均符号熵*H*N(**X**)的极限值，即极限值*H*∞是存在的，且为处于零和*H* (X)之间的某一有限值。  性质④表明，对于离散平稳信源，当考虑依赖关系为无限长时，平均符号熵和条件熵都非递增地一致趋于平稳信源的信息熵（极限熵）。所以可以用条件熵或平均符号熵来近似描述平稳信源。即    性质①~④主要讨论了离散平稳信源的平均符号熵和条件熵，结论可以这样理解：两者随着*N*的增加都是单调非增的；当*N*给定时，前者不小于后者；当*N*→∞时，两者相等，就是极限熵*H*∞。  下面对离散平稳信源的4个性质作证明。  性质①的证明：类似于“条件熵不大于无条件熵”的证明，同理证得“条件较多的熵不大于减少一些条件的熵”，即    因为信源是平稳的，所以有    故得    同理可得，平稳信源有    性质②的证明：根据平均符号熵的定义以及熵的链规则，可得    运用性质①，得    性质③的证明：根据平均符号熵的定义    运用性质②，得    所以    性质④的证明：一方面，由性质②，令N→∞，有  (4.1)  另一方面，根据平均符号熵的定义以及熵的链规则，有  根据条件熵的非递增性和平稳性，有  当*k*取足够大时*N*→∞，固定*N*，而和为定值，所以前一项因为可以忽略。而后一项因为，所以得    再令N→∞，因极限存在    所以得  (4.2)  最后，由式（4.1）和式（4.2），必有    总结有限维离散平稳信源的极限熵计算式如下   1. 二维平稳信源的极限熵   这与上节例题4.3中得到的式子是一致的。   1. （m+1）维离散平稳信源的极限熵为   简记为。  容易理解，二维离散平稳信源的极限熵为，且。  4.5 马尔可夫信源的极限熵  当信源输出序列长度*N*很大甚至趋近于无穷大时，描述有记忆信源要比描述无记忆信源困难得多。在实际问题中，我们往往试图限制记忆长度，就是说任何时刻信源发出符号的概率只与前面已经发出的*m*(*m*<*M*)个符号有关，而与更前面发出的符号无关。  用概率意义可表达为    这是一种具有马尔可夫链性质的信源，是非平稳信源，是十分重要而又常用的一种有记忆信源。  此部分内容略，细节请参阅相关资源    4.6 信源的剩余度  信源的剩余度主要来自两个方面：一是信源符号之间的统计相关性；二是信源符号概率分布的不均匀性。  设信源X:{a1,a2,…,a*r*}，讨论信源X在不同条件下的平均符号熵。  当X离散平稳无记忆    当X记忆长度为1时    当X记忆长度为2时      当X记忆长度为*m*时    当X记忆长度为无限时    任何一个符号数为*r*的信源，只有信源符号等概分布时，才能提供最大信息量。称为结构信息，结构信息与的比值称为信源的剩余度。    信源实际熵与的比值称为熵的相对率    此时，  由于，所以，信源输出符号间的依赖关系越大，即相关长度长，则信源实际熵小，熵的相对率小，信源的剩余度就越大。  在设计通信系统时，信源剩余度对信息传输是不利的，所以，往往通过信源编码的方法将原始信源序列化为信道符号序列。使信道序列符号接近于等概分布，交互信息量达到信道容量，提供通信的有效性；但在通信系统设计中，有效性和可靠性是相互矛盾的，为了降低误码率，提高可靠性，则使用信道编码方法，即以增加冗余码元，降低有效性为代价来提高通信的可靠性。 | | 说清楚单符号与多符号离散信源的区别与联系  信源平稳性有严格的数学定义  离散平稳无记忆信源的信息熵是研究有记忆信源熵的基础  由特殊的二维离散平稳信源熵引出多维离散平稳信源熵的计算机制，由特殊到一般，将抽象过程具体化。  典型例题，需要精讲  极限熵的四条性质，要求会证明，并理解其中的物理含义  马尔可夫信源的极限熵略讲，需要了解 |
| **小结** | 多符号离散信源熵的计算 | |
| **复习要点** | 多符号离散平稳信源概念、平稳信源熵的计算 | |
| **思考题** | 1. 平稳信源极限熵如何计算？ 2. 马尔科夫信源是平稳信源吗？ | |
| **作业题** | 4.5 4.5 | |

作者签名：

****