**第 18 次课 学时 2**

|  |  |
| --- | --- |
| **授课章节内容** | 第九章 限失真信源编码 |
|  | 9.1失真测度 |
|  | 9.2信息率失真函数 |
|  | 9.3限失真信源编码定理 |
| **教学目标** | 教学目标6 |
| **支撑毕业要求** | 毕业要求2-1 |

**教学要求：**

1. 1.知识目标

失真测度，信息率失真函数，香农第三定理

1. 能力目标

* 能够正确理解和运用信源有损压缩编码的基本原理

3.素质目标

* 激发学生对电子信息相关专业课程的学习热情，通过对信源有损压缩的学习，提升工程实践的理论分析能力

**教学重点与难点**：

* 信息率失真函数，香农第三定理

**教学过程设计：**

1. 课前预习，观看视频9.1,9.2
2. 对比无失真信源编码，导入新课
3. 小结与作业

**教学方法及手段：**讲授法、讨论法；PPT为主，板书为辅。

| **讲授与指导内容** | | **讲课、互动内容设计** |
| --- | --- | --- |
| 第九章 限失真信源编码  连续信源的绝对熵为无限大，而通信系统信道容量总为有限的，不可能实现完全无失真地传输。即使离散信源，也存在信息压缩问题。而且人体感觉器官比如听觉和视觉，对感知对象存在一定的灵敏度，允许对原信源进行有损压缩。  本章的核心问题是，在给定失真度*D*条件下，讨论信源信息压缩的程度，也就是描述信源的最小比特数是多少。信息率失真理论是量化，模数转换、频带压缩和数据压缩的理论基础。  首先介绍信息率失真理论的基础内容，给出失真测度、信息率失真函数的定义，然后讨论信源信息率失真函数的计算，以及论述香农第三定理——限失真信源编码定理等。  9.1 失真测度  对于如图9.1所示的通信系统，人为地规定一个非负实值函数  ，  称为和之间的失真度。    图9.1通信系统模型  显然，共有种取值，将其排列成一个阶矩阵    矩阵称为信道的失真矩阵。  【**例9.1**】设信道的输入符号个数和输出符号个数相等，都为*r*，规定失真度  （9.1）  这种失真度称为对称失真度，相应的失真矩阵    这种失真矩阵的特点，是对角线上的元素均为“0”（，），对角线以外所有其他元素均为。  在（9.1）式所示失真度中，如，即失真度为    这种失真度称为汉明（Hamming）失真度，相应的失真矩阵    汉明失真矩阵的特点，是对角线上元素均为“0”，对角线以外所有其他元素均为“1”。  【**例9.2**】设信道输入符号集为，输出符号集为。规定失真函数为  （9.2）  相应的失真矩阵为  （9.3）  若信道输入符号集为，信道输出符号集为，则失真度（9.2）式可表示为    相应的失真矩阵（9.3）式可以改写为    【**例9.3**】设信道的输入符号集为，输出符号集为，规定失真为  （9.4）  这种失真度称为均方误差失真度，相应的失真矩阵为  （9.5）  若信道的输入、输出的符号集分别为：、，则失真度（9.4）式可以改写为    相应的失真矩阵（9.5）式可改写为    是一个概率为的随机变量，不可能作为一个通信系统整体失真大小的测度。定义通信系统的平均失真度为  （9.6）  当信源X给定，失真度规定后，平均失真度就是信道传递概率的函数  （9.7）  从总体上，即从平均意义上给出允许失真的程度，也就是保真度规则    满足保真度准则的试验信道可能有若干个，集合    表示所有满足保真度准则的试验信道的集合。  9.2 信息率失真函数  9.2.1保真度准则下的信源压缩举例  在允许一定程度失真的情况下，信源所需输出的信息率是可以压缩的。下面以具体实例加以证明，设信源*X*有2*n*种不同的符号，即，且该信源为等概信源，即有    若规定失真度为汉明失真度，即    如要求从平均的意义上不允许有失真，即允许平均失真度*D*=0，则必须用图9.2所示无噪信道进行传输，其平均交互信息量  （9.8）  如允许平均失真，这意味着，收到100个符号允许有50个符号发生错误。为了满足保真度准则，取。为此，可选用图9.3所示信道。对于信源符号到，按原样送出去；对到都用代表发出去（把都量化为，即可看作是对信源符号的一种编码方法）。考虑到规定的是汉明失真度，所以以概率1传送为各自本身，各自引起的失真均为0.而以概率1传送为，各自引起的失真均为1。由此，这个信道的平均失真度    即满足保真度准则。    图9.2无噪信道 图9.3有噪信道  由于这个信道的传递概率等于零或1，所以噪声熵一定等于零，则平均交互信息量  （9.9）  其中，随机变量*Y*的概率分布      则随机变量*Y*的熵    由（9.9）式可得，这个信道的平均交互信息量  （9.10）  （9.8）和（9.10）式表明，正因为允许失真*D*=1/2，在满足保真度准则的条件下，信道所需传递的平均交互信息量可从不允许失真，即*D*=0时的下降到。  下面给出一个重要定理，不做证明  **定理9.1** 若信源*X*给定，则平均交互信息量是信道转移概率的∪型凸函数。  根据定理9.1，若规定失真度为、允许平均失真度为*D*，则在满足保真度准则的所有试验信道的集合中，总可以找到某一试验信道，使信道的平均交互信息达到最小值  （9.11）  (9.11)式所示称为给定信源*X*在规定失真度、允许平均失真度为*D*时的信息率——失真函数。  信息率失真函数就是在满足保真度准则的前提下，信源*X*所必须输出的最小信息率，是信源*X*自身统计特性的函数，当然也是允许平均失真度*D*的函数。  所谓满足保真度准则的试验信道集合中的条件概率，并不一定具有实际信道含义，只是为了求得平均交互信息量的最小值而引用的虚拟可变信道。它只具有数学意义，体现了在限定失真条件下的信源编码方法。  9.2.2信息率失真函数的定义域  下面讨论函数的定义域  1. 和  平均失真度*D*是信道转移概率的函数，也就是试验信道的函数，如何选择试验信道，使平均失真度达到最小值？  **定理9.2** 设给定信源*X*的概率分布在，规定失真度。则允许平均失真度*D*的最小值    【**证明**】在图9.1所示通信系统中，设给定信源*X*的概率分布，规定失真度  （9.12）  其失真矩阵为  （9.13）  由定义（9.6）和（9.7）式可知，在和都给定或规定的情况下，必须变动信道的传递概率，才能求得平均失真度的最小值，即有    (9.14)  现在的问题，就是以什么原则来选择合适的试验信道，使（9.14）式中的每一项都能取得最小值。  (9.14)式中的第项为  （9.15）  其中  （9.16）  是（9.13）式规定的失真矩阵中的第行的*s*个元素。可以肯定，这*s*个元素中必有最小值。把这个最小值记为  （9.17）  这个最小值可能只有一个，也可能有若干个相同的最小值。设第行的第列元素都是相同的最小值，即    其中，  （9.15）式中的*s*个传递概率    是要寻找的试验信道的信道矩阵中的第行的*s*个元素，是（9.15）式中为了求得最小值而可变动的因素。显然，为了使（9.15）式取得最小值，必须遵循这样的原则来选择试验信道的信道矩阵中的第行的*s*个传递概率，这个原则就是：  （9.18）  按（9.18）式所示原则选择试验信道的信道矩阵中的第行*s*个元素，（9.15）式可改写为  （9.19）  因为（9.18）式所示原则的实质，就是通过选择试验信道的信道矩阵中的第*i*行的*s*个元素，保留失真矩阵中第行中的最小值，去掉所有比大的元素，所以（9.19）式所得值，一定是（9.14）式中第项中的最小值。  把（9.18）式所示原则用于（9.14）式中*r*项的每一项，则可得到能使其每一项都取得最小值的试验信道的信道矩阵中*r*行、*s*列的个全部元素，即得到能使平均失真度达到最小值的试验信道的阶信道矩阵，从而由（9.14）式求得平均失真度的最小值  （9.20）  （9.20）式表明，平均失真度的最小值，只与给定信源*X*的概率分布和规定失真度，即失真矩阵有关。平均失真度的最小值，等于信源发符号的概率与失真矩阵中第行中最小元素的乘积对所有相加之和。对于给定信源*X*来说，平均失真度的最小值，只取决于失真矩阵中每一行的最小元素。  人们只能在给定信源和规定失真度的条件下，平均失真度所能达到的范围内选择一个适当值作为允许失真度*D*。所以，（9.20）所示平均失真度的最小值，也就是允许失真度*D*的最小值，即有    求得最小平均失真度后，下面求解相应的信息率——失真函数。  **定理9.3** 设离散无记忆信源*X*的信息熵为，则的充分必要条件是，规定的失真矩阵中，每列最多只能有一个最小值。  【**证明**】（1）充分性的证明  由平均失真度取得最小值的试验信道选择原则（9.18）式可知，若失真矩阵中的第列中，只有一个最小值  （9.21）  则使平均失真度达到最小值的试验信道的信道矩阵中，第行、第列元素，就可取非零元素，即可有  （9.22）  而第列中所有个其他元素均等于零，即  （9.23）  这时，“在得知的前提下，推测”的后验概率  （9.24）  而“在得知的前提下，推测”的个后验概率  （9.25）  由（9.24）和（9.25）式可知，使平均失真度达到最小值的试验信道的所有后验概率不是等于1，就是等于零，即有  （9.26）  则试验信道的疑义度  （9.27）  从而，通过试验信道的平均交互信息量  （9.28）  这表明，若人们规定的失真矩阵中，每列只有一个最小值，所有满足保真度准则的试验信道的平均交互信息量，均等于信源*X*的信息熵。根据信息率——失真率函数的定义，即证得  （9.29）  这样，定理的充分性就得到了证明。  （2）必要性的证明  若允许失真度*D*选取其最小值，且离散无记忆信源*X*的信息率——失真函数等于信源*X*的信息熵，即  （9.30）  则表明，满足保真度准则的试验信道的平均交互信息量都等于信源*X*的信息熵，即有  （9.31）  这说明，满足保真度准则的试验信道的疑义度都等于零，即  （9.32）  则满足保真度准则的试验信道的后验概率要么等于1，要么等于零，即有  （9.33）  由（9.22）、（9.23）以及（9.24）、（9.25）式可知，满足保真度准则的试验信道的信道矩阵，每列至多只能有一个非零元素，其他个元素均等于零。  根据（9.18）式所示的原则，若要满足保真度准则，则规定的失真矩阵的每列中，与试验信道的信道矩阵的每列中仅有的一个非零元素的对应位置上，必须是一个最小值，其他个元素必须都不是最小值。这就是说，失真矩阵中，每列至多只能有一个最小值。  下面再给出两个定理，证明请参考相关文献。  **定理9.4** 若离散无记忆信源*X*的信息熵为，则的充分必要条件是，规定的失真矩阵的*s*列中，有些列存在两个或两个以上的最小值。  **定理9.5** 对给定信源*X*，若失真矩阵的，相应的信息率——失真函数为；若失真矩阵的，并取，而相应的信息率——失真函数为，则有  （9.34）  【**例9.4**】设给定信源*X*的信源空间为  （9.35）  其中，  规定失真度为汉明失真度，即失真矩阵为  （9.36）  试求：允许失真度*D*的最小值、满足保真度准则的试验信道以及。  **解** 由（9.20）式可得  （9.37）  因为平均失真度的最小值，就是可选择的允许失真度*D*的最小值  （9.38）  由（9.18）式，可得满足保真度准则的试验信道是唯一的，其信道矩阵  （9.39）  因为（9.39）式所示信道是满足保真度准则的唯一试验信道，所以其平均交互信息量就是，即  （9.40）  又因为（9.39）式所示的信道矩阵每列只有一个非零元素1，所以  （9.41）  由（9.40）式，得  （9.42）  2.和  如何选择试验信道，能使平均失真度达到最大值？平均失真度达到最大值又如何表示？  **定理9.6** 设给定信源*X*的概率分布，规定失真度，则允许平均失真度*D*的最大值。  （9.43）  **【证明】** 在图9.1所示通信系统中，当输入随机变量*X*和输出随机变量*Y*之间统计独立，即对所有的和都有  （9.44）  时，通信系统的平均交互信息量。这种通信系统的最小平均失真度定义为通信系统的最大平均失真度，即  （9.45）  在（9.45）式中，对于每一个都有一个相应的  （9.46）  设  （9.47）  是（9.46）式所示这*s*个中的最小值，且令  （9.48）  其中， （9.49）  则（9.48）式可以改写为  （9.50）  由（9.45）式可知，要取（9.45）式的最小值，必须选择适当的。由（9.44）式可知，选择就是选择适当的试验信道。  若在（9.44）式所示的总的前提下，采用  （9.51）  则一定能使（9.45）式取得最小值，得  （9.52）  （9.52）式表明，对于给定信源*X*和规定的失真度，最大允许失真度  （9.53）  是由信源*X*的概率分布和规定的失真度所确定的。  **定理9.7** 给定信源*X*的信息率——失真函数的充分必要条件是，允许失真度。  **【证明】** （1）充分性证明。  根据的定义，凡满足保真度准则的试验信道的传递概率，一定满足（9.44）式，则试验信道的噪声熵  （9.54）  这样，凡满足保真度准则的试验信道的平均交互信息量  *I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)=H(Y)-H(Y)*=0 （9.55）  根据信息率——失真函数的定义，即证得  （9.56）  这样，定理的充分性得到了证明。  （2）必要性证明。  对概率分布为*P(X)*:{*p*(*ai*)(*i*=1,2,…,*r*)}的给定信源*X*和规定的失真度，若有  （9.57）  则满足保真度准则的试验信道的平均交互信息量，即输入随机变量*X*和输出随机变量*Y*之间一定统计独立，即一定有  *p*(*bj*/*ai*)=*p*(*bj*) (*i*=1,2,…,*r*;*j*=1,2,…,*s*) （9.58）  试验信道的平均失真度  （9.59）  由（9.47）式可知  （9.60）  由（9.59）和（9.60）式即可证得  （9.61）  最后以定理形式给出函数的数学特性，证明略。  **定理9.8** 给定信源*X*的信息率——失真函数是允许失真度*D*的*U*型凸函数。  **定理9.9** 给定信源*X*的信息率——失真函数是允许失真度*D*的单调递减函数。  **定理9.10** 给定信源*X*的信息率——失真函数是允许失真度*D*的连续函数。  9.3 限失真信源编码定理（香农第三定理）  信息率失真函数就是失真小于*D*时所必须具有的最小信息率。本节将证明：只要信息率大于，一定存在一种编码方法，使得译码后的失真小于*D*。  **定理9.11（离散无记忆信源的限失真编码定理）** 若一个离散无记忆平稳信源的率失真函数是，则当编码后每个信源符号的信息率时，只要信源序列长度*N*足够长，对于任意，，一定存在一种编码方式，使编码后码的平均失真度小于或等于。  定理9.11的含义是：只要信源序列长度*N*足够长，总可以找到一种信源编码，使编码后的信息率略大于（直至无限逼近）率失真函数，而平均失真不大于给定的允许失真度，即。由于为给定允许失真*D*前提下信源编码可能达到的下限，所以香农第三定理说明了达到此下限的最佳信源编码是存在的。  定理9.11又称为香农第三定理。可以这样来理解：*N*维扩展信源发送序列和信宿接收序列均为*N*长序列，即，，并在空间中按照一定原则选取个码字。信源编码时，就从M个码字中选取一个码字来表示信源序列，满足一定条件时，可以使编码后的平均失真。此时，编码后每个信源符号的信息率为  （9.62）  即不小于信息率失真函数。需指明的是，和都是以“bit/信源符号”为单位。  **定理9.12（离散无记忆信源的限失真编码逆定理）** 若一个离散无记忆平稳信源的率失真函数时，编码后信息率，则保真度准则不再满足。  限失真编码定理及其逆定理是有失真信源压缩的理论基础。这两个定理证实了允许失真*D*确定后，总存在一种编码方法，使编码的信息率可任意接近于函数，而平均失真。反之如果小于，那么编码的平均失真将大于*D*。如果用二元码符号来进行编码，在允许一定量失真Ｄ的情况下，平均每个信源符号所需的二元码符号的下限值就是。可见，从香农第三定理可知，确实是允许失真度为Ｄ的情况下信源信息压缩的下限值。  比较香农第一定理和香农第三定理可知，当信源给定时，无失真信源编码的极限值就是信源熵，而限信源编码的极限值就是信息率失真函数。在给定允许失真度*Ｄ*之后，一般。  对于连续平稳无记忆信源，虽然无法进行无失真信源编码。但是在限失真情况下，有与离散信源相同的编码定理。限失真编码定理只说明了最佳编码是存在的，但是具体构造编码的方法却未涉及。实际上迄今为止尚无合适的可实现的编码方法接近这个界。  【**例9.5**】设一个离散无记忆信源的概率空间为，假设此信源再现时允许失真存在，并定义失真函数为汉明失真。经过有失真信源编码后，将发送码字通过广义无噪信道传输，经译码后到达信宿，如图9.4所示。    图9.4 有失真压缩编码方法示例  （1）图9.4所示的有失真编码方案的信息传输率和平均失真*D*为多少？  （2）图9.4所示的有失真压缩编码是否为最佳方案？  **解：**（1）如图9.4所示的这种编码方法，把3个二元信源符号压缩成1个二元符号。因此编码后的信息率为    该编码方案中，接收序列与发送序列U之间有很大差异，其平均失真为    可见，图9.4所示的这种限失真编码方法压缩后信息率（比特/信源符号），而产生的平均失真等于1/4。  （2）根据限失真信源编码定理，总可以找到一种压缩方法，使信源输出信息率压缩到极限值，当*D*=1/4时    显然。所以，在允许失真度为1/4时，对等概率分布的二元信源来说，本例中的压缩方法并不是最佳方案，信源还可以进一步压缩。  由上例分析可知，在允许失真度*D*的条件下，信源最小的、可达的信息传输率是函数，它可以作为一种衡量压缩编码方法性能优劣的尺度。 | | 有损压缩编码的必要性  这是一个经典例题，有助于理解信源有损压缩理论  将有损压缩编码理解成一次通信过程，所以平均信息是研究限失真信源编码的工具  信息率失真函数是本章的核心概念，也是本课程的核心概念之一  定理9.2要细讲，用到的数学知识点多，对理解信息率失真理论至关重要  理解香农第三定理，仍然是一个极限定理 |
| **小结** | 信息率失真函数，香农第三定理 | |
| **复习要点** | 掌握信息率失真函数概念及求解 | |
| **思考题** | 信息率失真函数的定义域如何求解？ | |
| **作业题** | 9.4 | |

作者签名：

****