**第 9 次课 学时 2**

|  |  |
| --- | --- |
| **授课章节内容** | 第六章多维连续信源与信道 |
|  | 6.1 随机过程的离散化 |
| 6.2 多维连续信源的相对熵 |
| 6.3 多维相对熵的变换 |
| 6.4 无记忆信道的平均交互信息量 |
| 6.5 高斯白噪声加性信道的信道容量 |
| 6.6 香农公式讨论 |
| **教学目标** | 教学目标2, 3 |
| **支撑毕业要求** | 毕业要求1-4 |

**教学要求：**

1. 知识目标

* 随机过程的离散化；
* 多维连续信源的相对熵及变换；
* 无记忆连续信道的平均交互信息量；
* 高斯白噪声加性信道的信道容量

1. 能力目标

* 具备分析和计算波形信源的熵与波形信道的平均互信息的能力。

1. 素质目标

* 激发学生对电子信息相关专业课程的学习热情，通过理论推导，培养严谨科学素养，知其然还要知其所以然。

**教学重点与难点**：

波形信道香农公式的推导与结论使用

**教学过程设计：**

提前观看翻转视频6.1-6.6，由单维连续信源与信道分析过渡到多维连续信源与信道分析

| **讲授与指导内容** | | **讲课、互动内容设计** |
| --- | --- | --- |
| 第6章 多维连续信源与信道  对于信道输入和输出都是随机过程，即波形信源和波形信道，通过抽样定理可转化为多维连续信源和多维连续信道进行讨论，这是模拟信源转化为数字信源的理论基础，然后讨论波形信道的信道容量，即著名香农公式。  6.1多维连续信源  6.1.1 随机过程的离散化  随机过程{ *x(t)* }是样本函数*x(t)*的集合，有无限多个。对于每个时间连续的样本函数*x(t)*，若带宽小于等于*F*，即频域受限，观测时间小于等于*T*，即时域受限。根据时域抽样定理，*x(t)*完全可由2*FT*个抽样值表达，，，，，这样，就把时间连续的函数转换成时间离散的样值序列。  推广到随机过程，可以用一系列时刻上的随机变量序列来表达随机过程。  根据变换域分析原理，时域和频域当中一个域受限另一个即为无限大，所以用有限维(*N*=2*FT*)随机变量序列来表达随机过程，存在误差，但频率*F*以上或时间*T*以外的取值很小，因此不会引起函数的严重失真。  6.1.2 多维连续信源的相对熵  用N=(2FT)维连续随机矢量表达N维连续信源，其相对熵记为    下面讨论两种特殊分布的N维连续信源相对熵  1.均匀分布的N维连续信源的相对熵  设N维连续信源的概率密度函数    N维均匀分布连续信源的相对熵    N维均匀分布的连续信源的相对熵，等于N维区域体积的对数，亦等于中各变量在各自区间内均匀分布时的相对熵    2.高斯分布的N维连续信源的相对熵  N维高斯信源的概率密度函数为    上式中的协方差矩阵    其中    是行列式的第*i*行，第*k*列的代数余子式，令    由*rik*组成矩阵    则与互为逆矩阵，即有    即有  （6.1）  又考虑到有    由（6.1）式，有    根据相对熵的定义，N维高斯信源的相对熵    对于无记忆高斯连续信源，定义    为高斯连续信源中，和之间的相关系数，则协方差矩阵改写为  (6.2)  若    则随机变量和之间不相关。这时，（6.2）式所示矩阵为    且有      以及      这时，N维高斯信源的概率密度函数    若令    则有    无记忆的N维高斯信源的相对熵    第*i*维高斯随机变量相对熵为    故有    6.1.3 最大多维相对熵定理  在某种限制条件下，类似单维连续信源存在最大相对熵，多维连续信源熵也存在最大值。  **定理6.1**：若N维连续信源的取值区间限定为N维区域体积，则均匀分布的N维连续信源的相对熵*h*(***X***)达到最大值。  【**证明**】设N维连续信源中，随机变量的取值区间限定为，即的取值区间限定为N维区域体积，均匀分布的概率密度函数  （6.3）  概率密度函数为*p*(***x***)时，N维连续信源的相对熵  （6.4）  又设是同样N维区域体积中均匀分布以外的任何一种概率密度函数。对应的相对熵为    则有  （6.5）  运用“底”大于1的对数函数的上凸特性，并考虑到    和式，有  （6.6）  即证得  （6.7）  **定理6.2**: 若N维连续信源的协方差矩阵限定为[***M***],则高斯分布的N维连续信源的相对熵*h*(***X***)达到最大值。  【**证明**】设N维连续信源的协方差矩阵为    行列式的代数余子式为，并令    限定条件下的高斯分布的概率密度函数，记为  （6.8）  当概率密度函数为*p*(***x***)时，N维连续信源的相对熵  （6.9）  设是信源在此限定条件下，除高斯分布以外的任何一种概率密度函数，对应的相对熵为    则  （6.10）  运用“底”大于1的对数的上凸特性，并考虑到和式，有  （6.11）  即证得  （6.12）  表明，在协方差矩阵限定条件下，高斯分布的N维连续信源具有最大相对熵，大小只取决于协方差矩阵，与对应时刻随机变量均值无关。  6.1.4 多维相对熵的变换  N维连续信源通过线性网络后，输出N维随机矢量的相对熵的变化规律如何?  设***X***到***Y***变换是某种确定的对应关系，它们的函数关系为    ***Y***与***X***有确定的函数关系式，并假设此随机变量是随机变量的单值连续函数。因此，***X***也可以表示为***Y***的单值连续函数，即    多维随机变量***X***映射成另一多维随机变量***Y***，***X***落在样本区间一个给定的区域A的概率应等于***Y***在此样本空间相应区域B的概率。所以，  根据多重积分变量变换，有    式中，是雅可比行列式，为    证明可得    进一步，新旧联合概率密度函数，满足    可见，除非雅可比行列式等于1，否则，通过变换后，此随机矢量概率密度函数会发生改变。  变换后，此连续信源***Y***的差熵为    根据前述***Y***与***X***的变换关系，得    可见，变换前后，连续信源的差熵发生了改变。变化量为雅可比行列式对数的统计平均值。证明连续信源的差熵不具有变换不变性，是与离散信源熵的一个不同之处。  【**例6.1**】设原连续信源输出的信号是概率密度函数为的正态分布随机变量。经过一个网络输出，网络输入，输出变换关系为  得到  网络输出信号的概率密度函数  ***Y***的相对熵    该网络是一个放大倍数为k，直流分量为a的放大器，通过线性放大器后，熵值发生了变化，增加了比特。  6.2多维连续信道  6.2.1 无记忆信道的平均交互信息量  讨论完连续信源问题后，现在讨论连续信道的平均交互信息。  对于限时T，限频F的连续信源，可以转化为时间间隔的N(=2*FT*)维随机矢量。每一时刻的随机变量取值区间均为。传递概率密度函数为，信道输出端输出相应的随机变量，其取值区间均为，组成随机矢量。从整体上看待信息传递过程，相当于形成了一个新的信道，输入输出均为N维随机矢量，如图6.1所示。  {6TIW@)(J_U`OX)[}VB8M~M  图6.1多维无记忆信道模型  若Ｎ次扩展信道**(***X-Y***)**的传递概率密度函数可由单维连续信道**(***X-Y***)**的传递概率密度函数表示，并等于各时刻单维连续信道**(***X-Y***)**的传递概率密度函数的连乘    则信道**(***X-Y***)**称为无记忆连续信道。  对于无记忆连续信道的Ｎ次扩展信道，有    说明，时刻k的输出只依赖于同一时刻k的输入，与k时刻之前的输入序列和输出序列无关，这就是无记忆连续信道的“无记忆”性，又有    这说明，时刻k之前的*k*-1个输出只与k之前的*k*-1个输入有关，而与下一时刻的输入无关。这就是无记忆连续信道的“无预感”性。  下面给出反映Ｎ次扩展信道**(***X-Y***)**的平均交互信息量与单维连续信道**(***X-Y***)**在各时刻传递的平均交互信息量之间关系定理。  **定理6.3**连续无记忆信道**(***X-Y***)**的Ｎ次扩展信道**(***X-Y***)**的平均交互信息量。    【**证明**】连续无记忆信道**(***X-Y***)**的Ｎ次扩展信道**(*X-Y*)**的平均交互信息量  　（6.13）  输入随机矢量中每一时刻随机变量通过无记忆信道**(***X-Y***)**，输出随机变量的平均交互信息量之和  （6.14）  由（6.13）和（6.14），有    考虑到“底”大于１的对数函数的上凸特性，有    即证得  另一方面，对于无记忆信道，当信源无记忆时，即    有      即有  即 （6.16）  如果信源在N个时刻的概率密度函数相同，即  ，则各时刻的连续随机变量通过连续信道**(***X-Y***)**的平均交互信息量都等于连续信源X通过连续信道**(***X-Y***)**的平均交互信息量。这样，由（6.16）式，有，进一步，若信源无记忆，则有    6.2.2高斯白噪声加性信道的信道容量  在讨论高斯白噪声加性信道的信道容量之前，首先根据抽样定理和高斯随机过程的性质，给出两个不做证明的重要结论。  **结论1** 限时T、限频F，且均值为零、功率谱密度的高斯白噪声，经离散抽样，可转化为时间间隔的N=2*FT*个相互统计独立、均值、方差的高斯随机变量组成的Ｎ维连续随机矢量。  **结论2** 在限时T、限频F的限制条件下，均值为零、功率谱密度的高斯白噪声加性信道，是噪声均值、方差的高斯随机变量Ｎ的高斯加性无记忆信道的Ｎ次扩展信道。  下面证明信息论中一个重要定理。  **定理6.4** 在限时T、限频F的条件下，均值为零、功率谱密度的平稳高斯白噪声加性信道的最大信息传输速率    它的匹配信源是均值为零、功率谱密度的平稳高斯白信源。  【**证明**】根据结论2和定理6.3，有    一般假定连续信源是平均随机过程，且具有各态历经性，即概率密度函数，具有时间推移不变性，即    随机变量通过图6.2所示的信道是同一个高斯加性信道，平均交互信息量，，，就是图6.3所示高斯加性信道的平均交互信息量，即有    图6.2 N个高斯加性信道并联模型    图6.3高斯加性信道模型  故有  由定理6.3和信道容量定义，得到平均交互信息量的最大值    由噪声N是均值是零，方差是的高斯随机变量的高斯加性信道的信道容量，得    其匹配信源，为均值是零，方差是的高斯随机变量。  这样就得到高斯白噪声加性信道的信道容量    对应匹配信源是均值为，方差为的无记忆高斯信源*X*的N次扩展信源。  显然，根据结论1，高斯白信源符合高斯白噪声加性信道匹配信源的条件，由于，故有  　　　（6.17）  进而可得每单位时间（秒）内，高斯白噪声加性信道的最大输出速率  　　　　　　　　　（6.18）  式（6.17）或式（6.18）就是著名的香农公式，在限时、限频条件下，信道容量是信道带宽F，观察信号的持续时间T以及信噪功率比的函数。  【**例6.2**】无记忆加性信道中，加性噪声N是均值、方差的高斯随机变量，输入连续随机矢量中，连续随机变量、之间统计独立，和都是均值分别为、方差分别为的高斯随机变量，试计算平均交互信息量。  解：输入连续随机变量序列是均值，方差为的无记忆高斯信源X的N＝2次扩展信源。无记忆高斯连续信源*Ｘ*是无记忆高斯加性信道(*X-Y*)的匹配信源。所以，平均互信息量达到无记忆高斯加性信道的N＝2次扩展信道的容量，即有    【**例6.3**】设高斯白噪声加性信道的通频带宽为，又设信号噪声功率比为199。试计算该信道的最大信息传输率。  解：    6.2.3香农公式讨论  香农公式给出了加性高斯白噪声通信系统的信道容量，它是无差错传输下可以达到的极限信息传输速率。鉴于香农公式在信息论中的重要作用，下面对香农公式作深入讨论。  1.当带宽W一定时，信噪比SNR与信道容量成对数关系。若SNR增大，就增大，但增大到一定程度后会趋于缓慢。这说明增加输入信号功率有助于容量的增大，但该方法是有限的；另方一面降低噪声功率也是有用的，当时，，即无噪声信道的容量为无穷大。  2.当输入信号功率*Ps*一定，增加信道带宽，容量可以增加，但到一定阶段后增加变得缓慢，因为当噪声为加性高斯白噪声时，随着W的增加，噪声功率*N*0*W*也随之增加。  当时，趋于一个极限值。利用关系式, 可求出极限值，即    当对数底数取2，即单位为比特/秒时，信道容量为  比特/秒 （6.19）  式（6.19）说明：当带宽无限时，信道容量仍是有限的。当带宽不受限制时，传送1bit信息，最低只需0.693,但实际上要获得可靠的通信往往都比这个值大得多。  设每传送1比特信息所需能量为，对应信号功率为，则香农公式表示为和的函数关系  （6.20）  即  （6.21）  称为归一化信道容量，表示单位频带上的最大信息传输速率；称为比特信噪比，即每比特的信号能量与白噪声单边功率谱*N*0之比。  因此，当时，可得到实现可靠通信所要求的的最小值，此时  （6.22）  其值是-1.6dB,这就是香农限。香农限是对任何通信系统而言所要求的最小值， 没有一个系统可以低于这个香农限实现无差错传输。  3.一定时，带宽W增大，可以降低对信噪比SNR的要求，即两者是可以互换的。若有较大的传输带宽，则在保持信号功率不变的情况下，可允许较大的噪声，即系统的抗噪声能力提高。  需要说明的是，带宽和信噪比的互换过程不是自然而然实现的，必须通过具体的编码和调制等通信技术来实现。理想通信系统如图6.4所示，其中发送设备对信源输出的原始信号进行理想调制或编码，接收设备对信道输出的信号进行理想解调或解码。设原始信号的带宽为，进入信道的信号带宽为，接收设备的输入信噪比为，接收设备的输出信噪比为。因为接收设备完成发送设备的反变换，所以接收设备的输入信号带宽为，输出至信宿的带宽为。  图6.4 理想通信系统的示意图  这样，接收设备的输入信息速率为    假设接收设备不引入信息损失，则接收设备的输入信息速率和输出信息速率相同，即 （6.23）  而  （6.24）  即  （6.25）  因此当，时，有  （6.26）  可见，在理想通信系统中，增加宽带可以明显地改善输出信噪比，信噪比的改善与带宽比成指数关系。实际通信系统如扩频系统、宽带调频系统和脉冲编码调制，就是利用了这个原理。比如扩频通信将所需传送的信号扩频，使之远远大于原始信号带宽，以增强抗干扰的能力。需要指明的是，香农公式只证明了理想通信系统的“存在性”，却没有指出这种通信系统的实现方法。到目前为止，还没有一种实际通信系统能达到式(6.26) 表明的理想结果。但香农公式的伟大之处在于从理论上给出了带宽和信噪比进行互换的可能性，而后人正是沿着这个方向，不断努力去发现并实现这种互换的具体方法。  4.连续信道编码定理  和离散信道一样，连续信道的容量同样是信道中可靠通信的最大信息速率。香农第二编码定理同样适合于连续信道。  **定理6.5** **(连续信道编码定理)**对于带宽为W的加性高斯白噪声信道，信号平均功率为*Ps*，噪声功率为，即信道容量。当信息传输速率时，总可以找到一种信道编码和相应的译码规则，使平均错误概率*PE*任意小。反之，当时，找不到一种信道编码使平均错误概率*PE*任意小。  在实际通信系统中，为了可靠通信必须使。在带限AWGN信道条件下，要求  （6.27）  利用关系式,其中代表每比特的能量。可得  （6.28）  其中，为频带利用率，为比特信噪比。  因此，为了保证可靠通信，实际通信系统的和应满足  （6.29）  该关系式对任何通信系统都成立，当时，得到可靠通信所要求的的最小值，即-1.6dB香农限，频带利用率随着比特信噪比的变化的曲线如图6.5所示。理论上，在该曲线以下的任何点通信是可能的，而在其上的任何点通信是不可能的。  图6.5 频带利用率与比特信噪比的关系曲线  注意：在任何信道中，信道容量是一个明显的分界点，它是保证信息可靠传输的最大信息传输率。香农第二定理从理论上指出任何信道，信息传输速率*Rt*接近于*Ct*的最优抗干扰编码是存在的、可能的。这对实际信息传输工程有着重要的理论指导意义。  【**例6.4**】给定比特信噪比= 22dB，信道带宽为1MHz时，能否可靠传输信息速率为10Mbit/s的数据?  解:根据式（6.29）,信道带宽为1MHz时的最小值为    所以通过适当的编码方式可以实现无差错传输。  **本章要点**  1.无记忆均匀分布的N维连续信源的相对熵    2.无记忆高斯分布N维连续信源的相对熵    3.多维矢量Y与X的熵变换关系    4.香农公式 | | 随机过程的离散化是研究波形信源的前提  本内容是单维连续信源的拓展  唯一可译码的特性？  单维情况的推广  本内容是单维连续信道的拓展  这部分是课程核心内容之一，要求重点掌握  这部分讲解需要多结合工程案例  总结复习本章核心知识点 |
| **小结** | 多维连续信源的熵与多维连续信道的平均互信息；基于波形信道的香农公式 | |
| **复习要点** | 香农公式的产生背景，物理推导与工程应用 | |
| **思考题** | 影响波形信道信道容量的因素有哪些？ | |
| **作业题** | 6.5 6.9 | |

作者签名：

****