**第 12 次课 学时 2**

|  |  |
| --- | --- |
| **授课章节内容** | 第八章 有噪信道编码 |
|  | 8.1 错误概率和译码规则 |
| 8.2 有噪信道编码定理 |
| **教学目标** | 教学目标5 |
| **支撑毕业要求** | 毕业要求2-1 |

**教学要求：**

1. 知识目标

* 掌握错误概率和译码规则。
* 理解有噪信道编码定理。

1. 能力目标

* 能够利用信道译码规则分析选择最佳译码方式。

1. 素质目标

* 激发学生对电子信息相关专业课程的学习热情，通过对有噪信道编码定理的学习，明白提高通信系统可靠性的努力方向。

**教学重点与难点**：

* 信道译码规则；香农第二定理

**教学过程设计：**

课前观看视频8.1-8.3，通过案例分析，说明不同译码规则对错误概率的影响，然后定性讨论香农第二定理

| **讲授与指导内容** | | **讲课、互动内容设计** |
| --- | --- | --- |
| 第八章 有噪信道编码  信道编码是为了提高通信系统的可靠性而提供的技术，用来降低噪声、干扰以及衰弱等的影响。可靠性的提高以降低通信的有效性为代价,但大规模集成电路和高速数字信号处理技术可以弥补这一损失。  本章首先介绍信道编码定理，然后讨论几种常用的信道编码和译码方法。  8.1 错误概率和译码规则  错误概率是指经过信道译码后信宿接收码元的平均错误概率，即错误码元数与总码元数的比值，又称为译码错误概率或误码率。一般来说，错误概率和信道传输特性、信道编码方法及译码规则都有关。  在讨论信道编译码问题时，通常将信源和信源编码合并在一起作为等效信源，将信源译码和信宿合并作为等效信宿，而将信道编码和信道译码之间的所有部件看作广义信道，信道编码的数字通信模型如图8.1所示。信道编码一般只针对信道特性进行考虑，而假定其编码对象（即信源编码器输出的信息序列）是独立等概的。信道编码根据一定的规律在信息码元序列*M*中加入监督码元，输出码字*C*。由于信道中存在噪声和干扰，接收码字*R*与发送码字*C*之间存在差错。信道译码根据某种译码规则，从接收到的码字*R*给出与发送的信息序列*M*最接近的估值序列。    图8.1 信道编码的数字通信模型  8.1.1错误概率与编码方法  针对二元对称信道，以简单重复编码为例，说明通过信道编码可以降低平均错误概率的原理。  将信源符号重复发送次，并在接收端采用相应的译码方法，就有可能减少错误概率，从而通过牺牲有效性来换取可靠性的提高。比如信源发出两种符号*A*和*B*,分别用“0”和“1”表示。在发送端，信源符号为“0”(或“1”)时，则重复发送三个“0”(或“1”)。即用“000”代表消息*A*，“111” 表示*B*。由于3位的二元码有种组合，除去2组许用码字(“000”和“111”)外，余下的6组001、 010、 100、 011、101、 110不允许使用，称为**禁用码字**。此时，如果传输中产生一位错误，接收端将收到禁用码字，可以检测出传输有错，而且还可以根据“大数法则”来译码，即3位码字中如有2个或3个“0”，则译为消息*A*；如有2个或3个“1”，则译为消息*B*。所以，此时可以纠正一位错码。如果在传输中产生两位错码，接收端也将收到禁用码字，译码器仍可检错，但是不再具有纠错能力。如果在传输中产生三位错码，接收端收到是许用码字，这时不再具有检错能力。因此，这时的信道编码具有检出两位和两位以下错码的能力或者具有纠正一位错码的能力。    图8.2 （3,1）重复码的信道模型 这时信道可以看作是二元对称信道的三次扩展信道，信道输入是码长为3的许用码字，输出是码长为3的接收码字，如图8.2所示。  对应的信道矩阵为    一般来说，信道的错误转移概率。根据最大似然准则进行译码（参考下节），译码函数为     所以，当输入等概，时，纠1位错码的*n*=3的重复码的译码错误概率为  可见，采用简单重复编码，即使只能纠正这种码字中1个错误码元，当时，可以使平均错误概率从0.01下降到。这表明信道编码具有较大的实用价值。  如果进一步增大重复次数*n*,则会继续降低平均错误概率。可以算出    当*n*很大时，平均错误概率很小，但同时带来一个新问题，信息传输率大大减小。编码后的信息传输率(也称码率)表示为  (8.1)  其中，*M*表示许用码字的个数(即输入信道编码器的消息个数)，表示消息  集在等概条件下每个消息携带的平均信息量(底数为2时，单位为比特)。*n*是编码后码字的长度。  当*M*=2时，采用*n*位重复码，得到的码率为  可见信息传输有效性和可靠性是矛盾的。  8.1.2错误概率和译码规则  设一个二元对称信道的转移概率矩阵，错误转移概率为。如果在发送端直接将信息序列送入信道(即不进行信道编码，可以看作是一种特殊的信道编码)，译码规则为:接收符号为“1”，则译成发送符号为“1”；接收符号为“0”，则译成发送符号为“0”。则错误概率为     如果译码规则为:接收符号为“1”，则译成发送符号为“0”；接收符号为“0”，则译成发送符号为“1”。则平均错误概率   可见，错误概率不仅与信道的传输特性有关，也与译码规则有关。  现在来定义译码规则。设离散单符号信道的输入符号集为，输出符号集为,如果对每一个输出符号都有一个确定的单值函数,使对应于一个输入符号,则称这样的函数为**译码规则**。译码规则就是设计一个函数,表示为         (8.2)  显然，对于个输入个输出的信道而言，按上述定义得到的译码规则不是  唯一的。在这些译码规则中，不是每一种译码规则都是合理的。译码规则的选择应该根据什么准则呢?一个很自然的准则是使错误概率最小。因此在讨论译码规则的选择之前，首先来介绍如何计算错误概率。  在确定译码规则后，若信道输出端接收到的符号为，则一定译成。如果发送的就是,这就是正确译码；反之为错误译码。那么，收到符号的条件下正确译码的条件概率为  (8.3)  则错误译码的条件概率为         (8.4)  其中，表示除了之外的所有输入符号的集合。  错误概率应是错误译码的条件概率对空间取统计平均。即  (8.5)  如何设计译码规则使最小呢?由于式(8.5)中右边是非负项之和，所以可以选择译码规则使每一项最小。因为与译码规则无关，所以只要设计译码规则使错误译码的条件概率为最小，即后验概率最大，就可使得平均错误概率最小。   **定义8.1** 选择译码函数         使之满足条件         (8.6)  则称为**“最大后验概率(MAP)准则”**或**“最小错误概率准则”**。   这就是说，在给定的条件下，对于不同的的后验概率，进行比较，从中选择最大的对应的作为译码的结果。通常记为   (8.7)  MAP译码是一种最佳译码，对于每一个输出符号均译成具有最大后验概率的那个输入符号，就能使最小。但在实际译码中，找出后验概率相当困难，一般地，信道传递概率与输入符号的先验概率是已知的。由贝叶斯公式    这时，式(8.6)等价为  (8.8)  可见，如果输入符号的先验概率均相等，则MAP准则就可等价为寻找使最大的，即最大似然译码准则。  **定义8.2** 选择译码函数  使之满足条件  （8.9）  或记为  则称为**“最大似然译码准则”**。其中称为**似然函数**。  这就是说，对于每一个输出符号均译成具有最大似然函数的那个输入符号，如果输入符号的先验概率均相等，就可使得平均错误概率最小。  最大似然译码准则是实际应用中最常用的一种译码规则。它不再依赖先验概率,但是只有当先验概率相等时，最大似然译码准则和最大后验概率准则才是等价的。如果先验概率未知或不等概，仍采用这个准则，不一定能使平均错误概率最小。  根据译码准则，可写出平均错误概率。   （8.10）  可见，无论采用最大后验译码准则还是最大似然译码准则，是在联合概率矩阵中先求每列除去所对应的以外所有元素的和，然后再对各列求和。 如果先验等概，式(8.10)可写成  （8.11）  式(8.11)的求和是除去信道转移矩阵每列对应的那个元素之后，再对矩阵中其他元素求和。  【**例8.1**】设有一个离散信道，信道转移矩阵  并设,,  (1)试按照“最大后验译码准则”确定译码规则，并计算相应的译码错误概率。  (2)试按照“最大似然译码准则”确定译码规则，并计算相应的译码错误概率。  解:(1)因为最大后验译码准则等价为    可知需要先计算联合概率。因为  所以，由最大后验译码准则得到的译码规则为   这时的译码错误概率为    (2)已知信道矩阵，由最大似然译码准则得到的译码规则为   这时的译码错误概率为   可见，先验概率不相等时，最大似然译码准则和最大后验译码准则不等价。  平均错误概率与译码规则有关，而译码规则又与信道特性有关。由于信道中存在噪声，导致输出端发生错误，并使接收到输出符号后，对发送的符号还存在不确定性。可见，平均错误概率与信道疑义度有关。两者之间的关系表示为   (8.12)  其中，是输入符号集的个数，是错误概率的熵。该不等式由费诺第一个证明得出，所以称为**费诺不等式**。费诺不等式给出了平均错误概率的下限，它表明:当作了译码判决后所保留的关于信源的平均不确定性可分为两部分。一部分是接收到后是否产生错误概率的不确定性；另一部分是当判决错误(错误概率为)发生后，到底是个输入符号中的哪一个造成错误的不确定性，它是个输入符号不确定性的最大值与错误概率的乘积，即。  8.2 有噪信道编码定理（香农第二定理）  设有*M*种信源码字要在信道中传送，信道的输入符号序列(即码字)为,其中码元为元码。如何在个码字中选用*M*个许用码字来代表信源输出的消息，才能以任意小的错误概率传送，这就需要编码。这种编码实质上是针对信道特性对信源输出进行编码，以使信源与信道相匹配，所以称为信道编码。  **定理8.1 (有噪信道编码定理)** 若一个离散无记忆信道的信道容量为*C*,当信息传输率时，只要码长*n*足够大，总可以找到一种编码和相应的译码规则，使平均错误概率任意小。   定理8.1又称为香农第二定理，其含义是:设信道有*r*个输入符号和*s*个输出符号，其信道容量为*C*。对信道进行*n*次扩展，输入到扩展信道的码字(即经过信道编码得到的码字)长度为*n*,因此有个可供选择的码字。从个符号集中找到*M*个码字(即*M*个许用码字，用来代表*M*个等概出现的消息，且， 为任意小的正数)组成一码表。 需要指明的是，定理中的等概消息数应理解为信源扩展后经信道编码输出的码字数；定理中的信道容量*C*应该以“比特/码元”为单位(即对数底为2)，它与中的底数2相对应。这样编码后，信息传输率   (8.13)  则存在相应的译码规则，使有噪信道中传输信息的平均错误概率任意小。  定理8.1说明信道容量*C*是保证无差错传输信息传输率*R*的理论极限值。对于一个固定的信道，信道容量*C*是一定的，它是衡量信道质量的一个重要物理量。  关于有噪信道编码定理有以下几点说明。  ①有噪信道编码定理指出高效率和高可靠性的编码是存在的，并给出了信道编码的理想极限性能，为编码理论和技术的研究指明了方向。  ②定理证明过程中采用随机编码，在信道输入端的集中随机地选取经常出现的个高概率序列作为码字，数量很大，难以寻找到好码。  ③定理证明过程中采用最大似然译码准则。在接收端，序列集将映射到*M*个消息集中。  ④可以证明：当时，平均错误概率满足不等式   (8.14) 其中，*n*为码长；*E*(*R*) 称为可靠性函数或随机编码指数，它在0<*R*<*C*范围内是一个非增的非负函数，可靠性函数*E*(*R*)与*R*的关系如图8.3所示。可见，为了实现可靠通信，可以采用增大可靠性函数*E*(*R*)或增加码长*n*的方法；而且随着码长*n*的增加，按指数规律下降到任意小的值。    图8.3 可靠性函数与*R*的关系示意图  **定理8.2(有噪信道编码逆定理)** 若一个离散无记忆信道的信道容量为*C*，当信息传输率*R*>*C*时，无论码长*n*多么大，总也找不到一种编码和相应的译码规则，使平均错误概率为任意小。  需要指明的是，有噪信道编码定理及其逆定理对连续信道和有记忆信道同样成立。   综上所述，在任何信道中，信道容量是一个明显的分界点，它是保证信息可靠传输的最大信息传输率。香农第二定理从理论上指出:任何信道，只要信息传输率*R*接近于*C*,就有可能近似无差错传输，此差错可通过适当的编码来实现。也就是说，存在一种编码方式，通过不可靠的信道可实现可靠的传输，且有可能使信息传输速率接近于香农容量。这对实际信息传输工程有着重要的理论指导意义，多年来，编码理论家一直在探索逼近香农极限的实用码，即以接近香农信道容量的信息速率进行通信，而且近似无差错。近二十年来，信道编码取得可喜进展，信道编码采用Turbo码或LDPC码的通信系统，信息速率接近于香农容量时，在近似无差错(误比特率为)条件下，它所要求的值仅与理想值相差不到,且其编译码可实现。  8.2.1联合信源信道编码定理  由于信源每秒钟产生的信源符号数与信道中每秒钟传送的信道符号数通常  不一样，因此实际信息传输系统往往需要从单位时间来考虑，实现有效、可靠  传输的条件由定理8.3给出。    **定理8.3（联合信源信道编码定理）** 离散无记忆信源*S*的熵值为*H*(*S*) (比特  /信源符号)，每秒钟输出个信源符号；离散无记忆信道的信道容量为*C* (比特/信道符号)，每秒钟输出个信道符号。如果满足   (8.15)  或   (8.16)  则总可以找到信源和信道编码方法，使得信源输出信息能通过该信道传输后，平  均错误概率任意小。  【**例8.2**】 设一个二元对称信道，错误概率*p*= 0.02,设该信道以2 000二元符号/秒的速率传送消息，现有长度为15 000的独立等概的二元符号序列通过该信道传输，试回答实现该符号序列无差错传输的最短时间是多少?        解：二元对称信道的容量为         即每秒钟信道传送的信息量为               设实现该符号序列传输的时间是*T*秒，因信源熵为1比特/信源符号，符号序列长度为15 000，则信源每秒钟输出的信息量为15 000/*T*。根据联合信源信道编码定理，有        1 717.2> 15 000/*T*  即*T*>8.74*s*时，该符号序列可以无差错传输。  在实际通信系统设计中，为了做到既有效又可靠地传输信息，通常将通信系统的编码设计为信源编码和信道编码两部分。首先针对信源特性进行信源编码，然后针对信道特性设计信道编码。由于无失真信源编码和译码都是一一对 应的变换，因此它不会带来任何的信息损失；而信道编码只要满足，就存在某种编码方法，使得平均错误概率任意小。因此满足式(8.16)， 分两步处理不会增加信息损失，它和一步编码处理方法同样有效。       下面通过一个例子来理解联合信源、信道编码定理。  【**例8.3**】 设某二元无记忆信源   1. 如果信源每秒钟发出2.3个信源符号，将此信源的输出符号送入无噪信道中进行传输，而信道每秒钟只传送2个二元符号。通过适当编码，信源是否能够在此信道中进行无失真传输?试说明如何进行适当编码。        (2)如果信源每秒钟发出2.3个信源符号，送入二元对称信道中进行传输，而信道每秒钟传送25个二元符号。已知信道矩阵为   是否存在一种编码方法， 使得信源输出信息能通过该信道传输后，平均错误概率任意小?  解:信源熵   （1）二元无噪信道的最大信息传输率 *C*=1比特/信道符号  而信道每秒钟传送2个符号，所以该信道的最大信息传输速率    如果信源每秒钟发送2.3个信源符号，则信源输出的信息速率  则  所以，通过适当编码，信源能够在此信道中进行无失真传输。如何进行编码呢?可以对*N*次扩展信源进行霍夫曼编码，然后再送入信道。当*N*=2时，编码结果如表8.1所示。  表8. 1 *N*=2时的编码结果   |  |  |  | | --- | --- | --- | | 信源序列 |  | 霍夫曼码 | |  |  | 1 | |  |  | 01 | |  |  | 001 | |  |  | 000 |   当*N*=2时， 单个符号的平均码长  所以，二次扩展编码后，送入信道的传输速率为  信源编码得到的二元码符号进入信道，即信道符号就是二元码符号，由题意可知，信道每秒钟可以传送两个符号。因为1.94<2，此时就可以在信道中进行无失真传输。  (2)该二元对称信道的信道容量  *C*=0.082比特/信道符号 而信道每秒钟传送25个符号，所以该信道的最大信息传输速率  如果信源每秒钟发送2.3个信源符号，则信源输出的信息速率  则                由联合无失真信源信道编码定理可知：理论上存在一种编码方法， 使得信源输出信息能通过该信道传输后，平均错误概率任意小。 | | 通过案例分析说清楚为什么采用信道编码能够降低译码错误概率  译码规则是如何影响信道译码错误概率的？  给出两种译码规则的异同  典型例题，需要精讲  解释清楚信道编码定理的实质  该例题有助于理解抽象的信道编码定理 |
| **小结** | 错误概率与译码规则；信道编码定理。 | |
| **复习要点** | 掌握错误概率与译码规则；理解信道编码定理。 | |
| **思考题** | 二种译码规则在什么情况下等价？ | |
| **作业题** | 8.1 | |

作者签名：

****