**第 4 次课 学时 2**

|  |  |
| --- | --- |
| **授课章节内容** | 第三章 单符号离散信道 |
|  | 3.4 几种特殊结构的信道容量计算 |
| 3.5 信道容量的迭代计算 |
| 3.6 平均交互信息量的不增性 |
| **教学目标** | 教学目标3 |
| **支撑毕业要求** | 毕业要求1-4 |

**教学要求：**

1. 知识目标

掌握几种特殊结构的信道容量计算，了解信道容量的迭代计算， 了解平均交互信息量的不增性。

1. 能力目标

具备分析和计算信道信息传输信息量的能力

1. 素质目标

激发同学对电子信息类专业的学习热情。

**教学重点与难点**：

信道容量计算

**教学过程设计：**

* 以离散单符号信道的数学模型做基础，由浅入深给出信道容量的各种计算方法。

**教学方法及手段：**

PPT为主，例题，板书为辅。

| **讲授与指导内容** | | **讲课、互动内容设计** |
| --- | --- | --- |
| 3.7 几种特殊结构的信道容量计算  3.7.1 无噪无损信道  如图3.130所示    图3.13 无噪无损信道  输入输出符号一一对应，信道转移概率矩阵为单位矩阵    此时平均互信息满足    噪声熵H(*Y|X*)和损失熵H(*X|Y*)都为0。  此时输入符号的概率分布为等概分布。所以无噪无损信道的信道容量    3.7.2有噪无损信道  此时噪声熵H(*Y*|*X*)≠0，损失熵为0，对应信道的一个输入符号ai有多个输出符号bj与之对应，如图3.14所示。    图3.14 有噪无损信道  信道转移概率矩阵    信道反向转移概率，，信道容量    输入符号等概分布时达到信道容量。  3.7.3无噪有损信道  属于多个输入对应一个输出的信道如图3.15所示。    图3.15 无噪有损信道  顾名思义，这种信道噪声熵H(*Y*|*X*)=0，损失熵H(*X*|*Y*)≠0    信道容量    一定存在一种输入符号分布，使得输出符号，达到等概分布。  3.7.4对称离散信道的信道容量  若信道转移概率矩阵每行元素构成相同，称为输入对称；若转移矩阵中，每列元素构成相同，称为输出对称。若输入和输出都对称，此时信道称为对称信道。比如  ，  都是对称信道矩阵  若输入符号和输出符号个数相同，都等于*r*，那么信道矩阵为    式中，且，则此信道称为强对称信道或均匀信道。这类信道中总的错误概率为*p*，对称地平均分配给*r*-1个输出符号。它是对称离散信道的一类特例。二元对称信道就是*r*=2的均匀信道。对于均匀信道，其信道矩阵中各列之和也等于1（一般信道的信道矩阵中各列之和不一定等于1）。  对于对称信道，噪声熵H(*Y|X*)为    可见，离散对称信道的噪声熵就是矩阵某一行元素所对应的熵。信道容量为  （3.33）  当信道输入符号等概，即，信道输出符号概率    上式中是对称信道转移概率中的列和，是一个固定值。所以当信道输入符号等概时，输出符号也等概，达到（3.33）式所对应的信道容量，类似可以得到强对称信道的信道容量。    3.7.5准对称信道的信道容量  若信道转移概率矩阵中，每行都是同一行元素的不同排列，每列元素构成不同，但该信道矩阵按列可以划分为互不相交的子矩阵，每个子矩阵都是对称矩阵，则该信道称为准对称信道。例如，信道矩阵可以划分成两个对称的子矩阵和，因此它是对称信道。  **定理3.4** 对于准对称离散信道，当输入等概率时达到信道容量，其信道容量为    其中，H(Y)为输入等概时信道输出的熵，n为准对称离散信道矩阵按列可以划分成互不相交的子集，是第k个子矩阵中的行元素之和，是第k个子矩阵中的列元素之和，就是信道矩阵P中行元素集合的s个元素构成的熵函数。  【**例3.8**】设某信道的转移矩阵为    计算其信道容量。  分析：该信道为一个准对称信道，计算信道容量即为输入等概时的平均互信息量。  解：将划分为两个对称子矩阵  ，  因为    则，该准对称离散信道的信道容量为    需要指出的是，由于本题的信道为准对称信道，信道容量也可以通过计算输入等概时的平均互信息得到。  3.8 信道容量的迭代计算  对于一般离散信道来说，信道容量的计算比较复杂。迭代计算是一种常用的近似方法。  设单符号离散信道的输入符号集*X:*{*a*1*,a*2*,...,ar*}、输出符号集*Y:{b*1*b*2*,...,bs}*，信道的传递概率P*(Y*/*X):{p(bj*/*ai)*(*i*=1,2,...*,r*;*j*=1,2,...*s*)}。若输入符号集*X:*{*a*1*,a*2*,...,ar*}的概率分布*P(X)*:{*p(ai*)(*i*=1,2,...,*r*)}，则信道的平均交互信息量  （3.34）  是输入信源*X:*{*a*1*,a*2*,...,ar*}的概率分布*P(X)*:{*p(ai*)(*i*=1,2,...,*r*)}和后验概率P(Y|X):{p(bj/ai)(i=1,2,...,r;j=1,2,...s)}的函数  （3.35）  而先验概率*p(ai)*和后验概率*p(ai* /*bj)*不是两个独立的变量，他们之间按照如下关系式  （3.36）  发生相应的变化。  为了导出近似算法，暂时把后验概率*p(ai* /*bj)*当作自变量，而把本来要随之发生相应变化的应急变量近似看作固定不变量。由于p(bj/ai)也固定不变，则（3.34）式所示的平均交互信息量I(*X;Y*)就可以看作是后验概率p(a*i*/b*j*)的函数  （3.37）  由于“底”大于1的对数是∩型凸函数，所以具有上凸性。这样，就可以在条件  （3.38）  的约束下，对变量p(a*i*/b*j*)求∩型凸函数I[p(a*i*/b*j*)]的条件极大值，以及达到极大值的p(a*i*/b*j*) (i=1,2,...,r;j=1,2,...s)  为此，作辅助函数    取函数对p(a*i*/b*j*)的偏导数，并置之为零，得到稳定点方程  （3.39）  把（3.34）式代入（3.39）式，有  （3.40）  即有  （3.41）  由约束条件（3.38）式，得  （3.42）  则可以得到  （3.43）  这表明，当采用“把后验概率P(Y|X):{p(bj/ai)(i=1,2,...,r;j=1,2,...s)}看作变量，信源X:{a1,a2,...,a*r*}的概率分布*P(X)*:{p(ai)(i=1,2,...,r)}看作固定不变的量”这种近似处理的方法时，使平均交互信息量I[p(a*i*/b*j*)]达到最大值，即信道容量C的后验概率，就是信源的概率分布*P(X)*:{p(ai)(i=1,2,...,r)}时，给定信道P(Y|X):{p(bj/ai)(i=1,2,...,r;j=1,2,...s)}的一般意义下的后验概率。这是因为对给定信道P(Y|X):{p(bj/ai)(i=1,2,...,r;j=1,2,...s)}来说，当输入信源X:{a1,a2,...,a*r*}的概率分布*P(X)*:{p(ai)(i=1,2,...,r)}固定不变时，其信道的平均交互信息量只有一个确定的值，其最大值也只可能就是这唯一的确定值。达到这唯一确定值的后验概率当然只可能就是由（3.36）式所规定的一般意义下的后验概率。所以，由（3.43）式可知，当变动后验概率，而固定信源的概率分布时，信道容量  （3.44）  另一方面，同样可把信源的概率分布当作自变量，把本来要随之发生相应变化的应变量近似的看作是固定不变的量。在采用这种近似处理时，由于和都是固定不变，则（3.34）式所示的平均交互信息量就可以看作是先验概率的函数    由于是的∩型凸函数，所以可在条件  （3.45）  的约束下，对变量求函数的条件极大值，以及达到极大值的  为此，作辅助函数  （3.46）  取函数对的偏导，并置之为零，得到稳定点方程  （3.47）  把（3.34）式代入（3.47）式，有  （3.48）  即有    即（3.49）  由约束条件（3.45）式，得  （3.50）  即得  则可以得到  （3.51）  若令    由（3.51）式，得  (3.52)  则信道容量  （3.53）  综上所述，（3.44）式是在信源的概率分布固定不变，变动后验概率的假设前提下，传递概率为的给定信道的信道容量C的近似迭代公式。（3.53）式是在后验概率固定不变，变动信源的概率分布的假设前提下，传递概率为的给定信道的信道容量C的近似迭代公式。实际上，由（3.36）式可知，对于传递概率固定为的给定信道，在变动后验概率时，先验概率不可能固定不变；在变动先验概率时，不可能后验概率固定不变。迭代计算法就是用分别单独变动和的方法，逼近和同时变动的实际情况，求得信道容量C的近似值。  先假定一组作为起始值，并记为。把作为固定值，变动。由（3.43）式求得后验概率  (3.54)  由（3.44）式求得信道容量    再把由（3.54）式所得的作为固定值，变动先验概率，由（3.52）式求得使平均交互信息量达到最大值的输入信源的概率分布    由（3.53）式求得信道容量    以此类推，一般可有    在实际计算中，逐段比较和；和；和的值。当n次迭代和（n+1）次迭代的计算值的差，已小到可以允许的程度，就可认为达到了所求信道容量值C。  3.9平均交互信息量的不增性  在实际通信系统中，常需对信道传输的数据作适当处理，若把数据处理装置亦看作是一个信道，这就由两个信道串接，组成了一个串接信道。  设信道I和信道II串接，组成图3.16所示串接信道。信道I的输入符号集*X*:{a1,a2,...,ar}输出符号集*Y*:{b1,b2,...,bs}，输出符号集Z:{c1,c2,...,cL}。又设，信道I的传递概率，信道II的传递概率。且假定    图3.16串接信道  由一个信道组成的通信系统只有输入、输出两个随机变量*X*和*Y*。由两个信道串接组成的串接信道中，就有*X*、*Y*、*Z*三个随机变量，那么，由三个随机变量构成的随机变量序列（*XYZ*），在信息传输上又有什么新的特点和规律呢？  详细推导请参阅教材，这里给出两个例子    【**例3.9**】设信道Ⅰ和信道Ⅱ相接，组成图3.19串接信道。若随机变量序列（XYZ）是Markov链，试证明。    图3.19 （XYZ）构成Markov链  解：因为随机变量序列（*XYZ*）是Markov链，由图3.19可知，串接信道的信道矩阵    由于串接信道的信道矩阵[*P*]与信道Ⅰ的信道矩阵完全一致，所以有    根据（3.97）、（3.96）、（3.95）、（3.94）、（3.93）式，随机变量序列（*YZX*）亦是Markov链。根据定理3.8，可证得  这一特例说明，在（*XYZ*）是Markov链的条件下，信道Ⅱ是一一对应确定关系的一般无噪信道，是（3.84）式中等式（3.85）成立的必要条件，但不是充分条件。  【**例3.10**】设有三个二进制对称信道（BSC），串接组成下图所示串接信道。随机变量序列（*XYZW*）是Markov链。若信源是等概信源，试求平均交互信息量、、，并比较它们的大小。      图3.24 三个信道串联  解：（1）因为信道Ⅰ的矩阵为    信源*X*的概率分布为  ；  所以，随机变量*Y*的概率分布为      则随机变量*Y*的熵  *（*比特/符号*）*  由信道Ⅰ的信道矩阵，有    所以，信道Ⅰ的平均交互信息量  （3.103）   1. 因为随机变量序列（*XYZW*）是Markov链，所以信道Ⅰ、信道Ⅱ的串接信道的信道矩阵，等于信道Ⅰ矩阵与信道Ⅱ矩阵的连乘，即有     随机变量*Z*的概率分布为      则得随机变量*Z*的熵  比特/符号  由串接信道的信道矩阵，有    则  （3.104）  同理可得  （3.105）  则可有  （3.106）   1. 一般地，设有*N*（大于1的正整数）个二进制对称信道（BSC），串接成如下图所示的串接信道。当信源*X*是等概分布时，同理可证：     图3.25 串接信道  （3.107）    则有  （3.108）  （3.108）式是由N个二进制对称信道（BSC）组成的串接信道，当信源*X*：{0,1}为等概信源时，数据处理定理的具体表现。  实践：信道容量的迭代算法  【已知】信源符号个数*r*、信宿符号个数*s*、信道转移概率矩阵。  【算法】  ①初始化信源分布，循环变量，门限，。  ②  ③  ④  ⑤若，则，转第②步。  ⑥输出和，终止。  【要求】   1. 输入：任意的一个信道转移概率矩阵。信源符号个数、信宿符号个数和每个具体的转移概率在运行时从键盘输入。 2. 输出：最佳信源分布，信道容量C。   **本章要点**  1.离散信道模型    2.信道的交互信息量    3.条件交互信息量    4.平均交互信息量    5.平均互信息的性质  非负性  极值性      凸函数性  平均互信息量，在信道转移概率给定条件下，是输入随机变量X的概率分布的∩型凸函数。  平均交互信息量，在信源概率分布给定的条件下，是信道转移概率的∪型凸函数。  6.定义 信道容量      7.离散对称信道容量    **8.准对称离散信道容量**    **9.数据处理定理**  信息所经过的传输信道或数据处理装置越多，丢失的信息量就可能越多。即有 | | 典型信道容量的计算  强对称信道是BSC信道的扩展形式  准对称信道容量计算有两种方法，都要讲解  信道容量的迭代计算，掌握方法即可  平均交互信息量的不增性，这部分了解即可  请同学们利用课外时间完成该实践项目  简要总结本章内容 |
| **小结** | 通过对离散信道的信道容量计算，为今后打下分析和计算信道信息传输信息量的能力打下基础 | |
| **复习要点** | 信道容量计算 | |
| **思考题** | 1.信道容量计算都有哪些方法？  2. 信道容量迭代计算的收敛条件是什么？（拔高题） | |
| **作业题** | 3.3 3.11 | |

作者签名：

****