**第 19 次课 学时 2**

|  |  |
| --- | --- |
| **授课章节内容** | 第九章 限失真信源编码 |
|  | 9.4 R(D)函数的计算 |
| 9.5 数据压缩的一般概念 |
| **教学目标** | 教学目标4 |
| **支撑毕业要求** | 毕业要求1-2 |

**教学要求：**

1. 知识目标

掌握R(D)函数的计算，了解数据压缩一般概念

1. 能力目标

* 能够根据所学原理掌握信源有损压缩的基本流程

1. 素质目标

* 激发学生对电子信息相关专业课程的学习热情，通过对限失真信源编码定理的学习，具备理论与实践协调统一的思维

**教学重点与难点**：

R(D)函数的计算；数据压缩

**教学过程设计：**

回顾信息率失真函数的概念，引入R(D)函数的计算，进一步拓展思维，讨论有损压缩

| **讲授与指导内容** | | **讲课、互动内容设计** |
| --- | --- | --- |
| 9.4 函数的计算  1.二元离散信源的函数  二元离散无记忆信源在汉明失真度下的信息率——失真函数的的计算，是离散信源信息率失真理论的基础。  **定理9.13** 若二元离散无记忆信源X的概率分布中的一个概率分量为，且允许失真度为D，则在汉明失真度下，信源X的信息率——失真函数  （9.63）  【证明】设二元离散无记忆信源X的信源空间为  （9.64）  其中，。规定失真度为汉明失真度，即其失真矩阵为  （9.65）  （1）和  根据定理9.2，由（9.64）和（9.65）式得  （9.66）  由（9.66）式，得满足保真度准则  （9.67）  的试验信道的信道矩阵  （9.68）  这个试验信道是满足保真度准则的唯一试验信道，其平均交互信息量就等于信息率——失真函数  （9.69）  因为（9.68）式所示试验信道矩阵[P]中，每列只有一个非零元素1，所以，试验信道的疑义度  （9.70）  由（9.69）、（9.70）式和（9.64）式，证得  （9.71）  （2）和  根据定理9.6，由（9.64）和（9.65）式得最大允许失真度  （9.72）  可知，满足保真度准则的试验信道的输出随机变量Y的概率分布为  ； （9.73）  由满足保真度准则的试验信道必须满足的条件可知，一定有  （9.74）  则可以满足保真度准则的试验信道的信道矩阵  （9.75）  而且，这个试验信道是满足保真度准则的唯一试验信道，其平均交互信息量就等于信息率——失真函数  （9.76）  显然，（9.75）式所示的信道矩阵的试验信道的噪声熵  （9.77）  由（9.76）、（9.77）式，证得  （9.78）  （3）  在图9.1所示的通信系统中，设给定离散无记忆信源：的概率分布为，试验信道的传递概率，在汉明失真度  （9.79）  下的平均失真度  （9.80）  由（9.79）和（9.80）式可改写为  （9.81）  在（9.81）式中，传递概率  （9.82）  就是信道把符号错误地传递为符号的错误传递概率，所以概率  （9.83）  是信道把符号传递为各种可能的错误概率的概率的总和，即信道传递输入符号的总的错误概率。由（9.81）式可知，在汉明失真度下，平均失真度就等于信道的平均错误传递概率，即  （9.84）  这是汉明失真度的一个重要特点。由此，汉明失真度又称之为“错误概率失真度”。  在阐明了汉明失真度这一重要的特点后，再回到如何导出的一般表达式这个核心问题上来。  根据（9.84）式，若选择允许失真度为D，则保真度准则就为  （9.85）  根据Fano不等式，由（9.85）式，得  （9.86）  （9.86）式表明，在汉明失真度下，满足保真度准则的试验信道的疑义度存在最大值  （9.87）  则根据信息率——失真函数的定义，有  （9.88）  （9.88）式是图9.1所示通信系统，在汉明失真度下的信息率——失真函数的一般表达式。对于概率分布为的二元（r=2）离散无记忆信源X来说，在汉明失真度下的信息率——失真函数  （9.89）  至此，由（9.71）、（9.78）和（9.89）式，已证得概率分布为的二元离散无记忆信源X，在汉明失真度下的信息率——失真函数  （9.90）  其函数曲线如图9.5所示.  f7e630a1cb3e16ece5d940fb0e8b8e6  图9.5二元离散无记忆信源信息率——失真函数曲线  （4）的试验信道  定理要得到完整的证明，还必须回答这样一个问题，即能不能找到一个试验信道，其平均失真度，且平均交互信息量达到信息率——失真函数？  在图9.1所示一般通信系统中，若选择汉明失真度  （9.91）  则由(9.84)式可知，平均失真度等于平均错误传递概率，即有  （9.92）  在（9.92）式中，  （9.93）  是反向信道传递的错误传递概率，（9.92）式可改写为  （9.94）  而（9.92）式既表明正常信道的平均失真度，又表示反向信道的平均失真度。所以（9.92）、（9.93）、（9.94）式表明，在汉明失真度下，反向信道的平均失真度，同样等于平均错误传递概率。由（9.94）式可知，平均错误概率可用随机变量Y的概率分布和后验概率来表示。这就意味着，可通过选择适当的后验概率，使“反向信道”成为满足保真度准则的试验信道。    图9.6反向试验信道  对概率分布为的二元（r=2）离散无记忆信源X，若允许失真度为Ｄ，设反向试验信道（图9.6）的传递概率分别为：  （9.95）  由（9.92）式可知，反向试验信道的平均失真度  （9.96）  这表明，图9.6所示反向试验信道满足保真度准则。  由（9.95）式，可得图9.6所示反向试验信道的条件熵  （9.97）  另一方面，因为（9.86）式是在汉明失真度下普遍成立的，所以对于二元（r=2）离散无记忆信源X，（9.86）式可改写为  （9.98）  由（9.98）和（9.97）式可知，图9.6所示反向试验信道的条件熵，已达到最大值，即  （9.99）  则其平均交互信息量达到最小值  （9.100）  则根据信息率——失真函数的定义，图9.6所示反向试验信道就是达到信息率——失真函数  （9.101）  的试验信道。  最后，令反向试验信道的输入随机变量Y的概率分布  （9.102）  则  （9.103）  由X的概率分布可得  （9.104）  即解得  （9.105）  和  （9.106）  这表明，以（9.105）、（9.106）式作为输出随机变量Y的概率分布，以（9.95）式作为信道传递概率的反向试验信道，就是给定信源X在汉明失真度下的信息率——失真函数的试验信道。  由（9.63）式清楚地看到，当允许失真度，即不允许失真时，为了满足保真度准则，信源X必须输出全部的信息量，即；当允许失真度为时，为了满足保真度准则，则信源X必须输出的最小信息量可由原来的下降到，即由于允许失真D，使信源X的最小输出信息率压缩了。  【**例9.6**】设二元离散无记忆信源X的信源空间为    规定汉明失真度，即失真矩阵为    试求：该信源的和、和以及，并构建达到的反向试验信道。  解 （1）由（9.66）式，有    由（9.71）式，有    （2）由（9.72）式，有    由（9.78）式，有  （3）由（9.89）式，有    由和、和以及，可得图9.7所示的曲线。    图9.7 R(D)函数曲线   1. 由（9.95）式可知，达到的反向试验信道的传递概率分别为     达到信息率——失真函数的反向试验信道的传递特性如图9.8所示。    图9.8反向试验信道  由（9.105）和（9.96）式得随机变量Y的概率分布      2.等概离散信源的函数  等概离散无记忆信源，是一种应用广泛且比较典型的离散信源。在汉明失真度下，求解等概离散无记忆信源的信息率——失真函数，是离散信源的信息率失真理论中经常会遇到的课题。  **定理9.14** 在汉明失真度下，若D为允许失真度，则r元等概离散无记忆信源X的信息率——失真函数  （9.107）  【**证明**】设r元等概离散无记忆信源X的信源空间为  （9.108）  规定汉明失真度  （9.109）  即失真矩阵为  （9.110）  （1）和  由（9.108）式和（9.109）式，根据定理9.2，得  （9.111）  则满足保真度准则的试验信道的传递概率  （9.112）  即试验信道的信道矩阵为  （9.113）  这个试验信道是满足保真度准则的唯一试验信道，其平均交互信息量  （9.114）  就是信息率——失真函数。  因为（9.113）所示信道矩阵[P]中每列只有一个非零元素1，所以其后验概率  （9.115）  试验信道的疑义度  （9.116）  由（9.114）、（9.116）式可得  （9.117）  （2）和  由（9.108）和（9.109）式，可得  （9.118）  由此可见，r元等概信源的一个显著特点，就是每一个的都等于同一个值  （9.119）  所以，所有满足（9.149）和（9.156）式的信道，都是满足保真度准则的试验信道集合中的试验信道，而且它们有相同的噪声熵  （9.120）  中所有试验信道都有相同的平均交互信息量  （9.121）  根据信息率——失真函数的定义，可得  （9.122）  （3）  由（9.102）式可知，在汉明失真度下，平均失真度等于信道的平均错误传递概率。当选择允许失真度  （9.123）  时，满足保真度准则的试验信道，都有  （9.124）  另一方面，Fano不等式是普遍成立的，由（9.124）式，得  （9.125）  这表明，在汉明失真度下，满足保真度准则的试验信道的疑义度的最大值为  （9.126）  这样，根据信息率——失真函数的定义，由（9.126）式，可得给定信源X的信息率——失真函数  （9.127）  由（9.108）式，（9.127）式可改写为  （9.128）  至此，（9.117）、（9.122）和（9.128）式证得，在汉明失真度下，r元等概离散无记忆信源X的信息率——失真函数  （9.129）  由此可得r元等概离散无记忆信源X在汉明失真度下的信息率——失真函数曲线（见图9.9）。    图9.9 r元等概离散无记忆信源的信息率——失真函数曲线  （4）的试验信道  定理要得到完整的证明，还必须找出一个试验信道，在满足保真度准则的条件下，其平均交互信息量达到（9.129）式所示。  设图9.10所示反向试验信道的传递概率为  （9.130）  在汉明失真度下，反向试验信道的平均失真度  （9.131）  这表明，图9.10所示反向试验信道，是满足保真度准则的试验信道集合中的一个试验信道，而且平均错误概率等于允许失真度D。    图9.10 R(D)试验信道  另一方面，图9.10所示反向试验信道的条件熵  （9.132）  由（9.84）式可知，（9.131）式所示反向试验信道的平均失真度等于平均错误概率，则有  （9.133）  所以，由Fano不等式，有  （9.134）  这说明，图9.10所示反向试验信道的条件熵已达到最大值  （9.135）  这个反向试验信道的平均交互信息量达到最小值，即信息率——失真函数  （9.136）  这表明，图9.10所示反向试验信道，是达到（9.128）式所示信息率——失真函数的试验信道。  在图9.10所示的反向试验信道中，随机变量X的概率分布为：  （9.137）  由（9.130）式，有  （9.138）  显然，当反向试验信道的输入随机变量Y的概率分布选择为  （9.139）  时，反向试验信道的输出随机变量X的概率分布就可等于给定信源X的概率分布，即  （9.140）  这样就证明了图9.10所示反向试验信道，是给定r元等概信源X，在汉明失真度下达到信息率——失真函数的试验信道。  综合（9.117）、（9.122）和（9.128）式证得，在汉明失真度下，r元等概信源X的信息率——失真函数  （9.141）  【**例9.7**】设离散无记忆信源X的信源空间为    规定汉明失真度，即失真矩阵为    试求：该信源X的和、和，计算并构建其试验信道。  **解** （1）和  由（9.111）式，得    由（9.117）式，得    （2）和  由（9.118）式，得    由（9.122）式，有    （3）  由（9.128）式，有    根据和、和以及，可得信源X在汉明失真度下的曲线（如图9.11所示）。    图9.11 R(D)函数曲线  （4）试验信道  由（9.130）式可知，达到的反向试验信道的传递概率为    其传递特性由图9.12表示。    图9.12 R(D)试验信道  由（9.139）和（9.140）式可知，为了确保信源Ｘ是等概信源，反向试验信道的输入随机变量Ｙ的概率分布必须为    由（9.131）式可知，在汉明失真度下，反向试验信道的平均失真度    这表明，图9.12所示反向试验信道满足保真度准则，是满足保真度准则的试验信道集合中的一个信道。  由（9.132）式可知，反向试验信道的条件熵    由（9.135）式可知，    则平均交互信息量达到最小值，即信息率——失真函数    这样，图9.12所示反向试验信道，是在汉明失真度下，给定的r元等概信源X，在满足保真度准则的情况下，达到信息率——失真函数的试验信道。 9.5 数据压缩的一般概念 动手实践：图像的离散余弦变换  利用MATLAB工具箱中的离散余弦变换函数，对一个图像实现离散余弦变换，并求出逆变换后重构图像的均方误差。  输入：读入一幅图像。  输出：离散余弦变换结果、逆变换后重构图像和均方误差。  本章要点  **1.定义 信道的失真矩阵**    **2.离散无记忆信源的限失真编码定理**  若一个离散无记忆平稳信源的率失真函数是，则当编码后每个信源符号的信息率时，只要信源序列长度*N*足够长，对于任意，，一定存在一种编码方式，使编码后码的平均失真度小于或等于。  **3.信息率——失真函数****的性质**  （1）给定信源*X*的信息率——失真函数是允许失真度的∪型凸函数。  （2）给定信源*X*的信息率——失真函数是允许失真度的单调递减函数。  （3）给定信源*X*的信息率——失真函数是允许失真度的连续函数。  **4.二元离散无记忆信源***X***的信息率——失真函数**    **5.r元等概离散无记忆信源***X***的信息率——失真函数**    **6.数据压缩定理**  设是离散无记忆信源的信息率—失真函数，是和每一个符号的平均失真度.若，则压缩比 | | 只讨论两种特殊信源的R(D)函数计算  曲线表达了R(D)函数的典型特征  数据压缩一般原理，请阅读指定资料  这是典型实践项目，请同学课下自主完成  简要总结本章核心知识点 |
| **小结** | 两种特殊信源R(D)函数的计算；信源压缩的一般概念 | |
| **复习要点** | 掌握两种特殊信源R(D)函数的计算；了解信源压缩的一般概念 | |
| **思考题** | 请举例说明信源有损压缩的应用领域 | |
| **作业题** | 9.10 | |

作者签名：

****