

线性方程组与矩阵

线性方程组的求解是线性代数要研究的重要问题之一，而矩阵是求解线性方程组的核心工具. 矩阵作为近代数学的重要工具，其理论在自然科学、工程技术、经济管理等领域中有着广泛的应用，是一些实际问题得以解决的基本工具. 本章通过线性方程组和矩阵的关系引出矩阵的定义，并介绍矩阵的代数运算及运算性质.

1.1 线性方程组与矩阵的概念

线性方程组是线性代数的核心内容，本节通过线性方程组和矩阵的关系引入矩阵的概念.

1.1.1 线性方程组

包含未知数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的一个线性方程，是形如

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (1.1)$$

的方程，其中 b 与系数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是实数或复数，且通常是已知数.

线性方程组由一个或几个包含相同变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的线性方程所组成.

一般地，含有 n 个未知数 m 个方程的线性方程组可以写成

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 a_{ij} 是第 i 个方程的第 j 个未知数的系数， b_i 是第 i 个方程的常数项 ($i = 1, 2, \dots, m$;

$j = 1, 2, \dots, n$). 当常数项 $b_1, b_2, \dots, b_m$ 不全为零时, 线性方程组 (1.2) 叫作 n 元非齐次线性方程组. 当 $b_1, b_2, \dots, b_m$ 全为零时, 线性方程组 (1.2) 成为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

称之为 n 元齐次线性方程组.

n 元线性方程组往往简称为线性方程组或方程组.

例如

$$\textcircled{1} \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 2; \end{cases} \quad \textcircled{2} \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2; \end{cases} \quad \textcircled{3} \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 = 0, \end{cases}$$

是三个二元线性方程组, 其中方程组 ③ 是齐次线性方程组.

若有序数组 $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ 满足方程组 (1.2) 中的所有方程, 则称其为该方程组的一组解. 例如, 方程组 ① 有一组解 $(1, 1)$, 这是因为在 ① 中用这些值代替 x_1, x_2 时, 方程组变成等式 $0 = 0$ 和 $2 = 2$.

对于 n 元齐次线性方程组 (1.3), $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 一定是它的解, 这个解叫作齐次线性方程组 (1.3) 的零解. 如果一组不全为零的数是齐次线性方程组 (1.3) 的解, 则它叫作齐次线性方程组 (1.3) 的非零解. 因此齐次线性方程组 (1.3) 一定有零解, 但不一定有非零解.

方程组所有可能的解的集合称为线性方程组的解集.

例如, 方程组 ① 有唯一解, 是 $x_1 = x_2 = 1$; 方程组 ② 无解, 因为不存在数 x_1 和 x_2 使 $x_1 + x_2 = 1$ 和 $x_1 + x_2 = 2$ 同时成立; 方程组 ③ 有无限多个解. 事实上, 对任一数 t , $x_1 = x_2 = t$ 都是方程组 ③ 的解.

由以上可知, 对于线性方程组需要讨论以下问题:

- (1) 它是否有解?
- (2) 有解时它的解是否唯一?
- (3) 如果有多个解, 如何求出它的所有解?

显然, 对于方程组 (1.2), 上述问题的结果完全由它的 $m \times n$ 个系数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 和右端的常数项 $b_1, b_2, \dots, b_m$ 确定, 即完全取决于由该方程组的系数和常数项所构成的 m 行 $n + 1$ 列的矩形数表:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

而对于齐次线性方程组(1.3), 上述问题的结果完全取决于它的 $m \times n$ 个系数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 所构成的 m 行 n 列的矩形数表:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

由此我们引入矩阵的概念.

1.1.2 矩阵的定义

定义 1.1 由 $m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

称为一个 m 行 n 列矩阵, 简称 $m \times n$ 阶(维)矩阵, 简记为 (a_{ij}) . 有时为了强调矩阵的行数和列数, 也记为 $(a_{ij})_{m \times n}$. 组成矩阵的 $m \times n$ 个数称为这个矩阵的**元素**, 简称**元**. 位于第 i 行第 j 列的元素用 a_{ij} 表示, 称为矩阵的 (i, j) 元素. i 称为元素 a_{ij} 的**行标**, j 称为元素 a_{ij} 的**列标**.

通常用大写英文字母 $A, B, C, \dots$ 表示矩阵. 如矩阵(1.4)可简记为

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{ 或 } A = (a_{ij}).$$

若一个矩阵的元素全是实数就称之为**实矩阵**, 元素是复数的矩阵称为**复矩阵**. 本书中的矩阵除特别说明外, 都指实矩阵.

当矩阵的行数与列数相等时称为**方阵**. n 行 n 列的方阵常称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵, n 阶矩阵 A 也记作 A_n . 元素 a_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n$) 所在的位置称为 n 阶方阵的**主对角线**. 称 a_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n$) 为**主对角元**.

特别地, 一阶矩阵是指由一个元素构成的矩阵, 可看作一个数.

只有一行的 $1 \times n$ 矩阵

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

称为**行矩阵**, 也称为 n 维行向量.

只有一列的 $n \times 1$ 矩阵

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

称为列矩阵, 也称为 n 维列向量.

元素全是零的 $m \times n$ 矩阵称为零矩阵, 用大写字母 O 表示. 零的维数通常可由上下文确定, 否则我们就用 $O_{m \times n}$ 表示. 例如

$$O_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

形如

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

的 n 阶方阵称为对角矩阵, 简称对角阵. 其特点是主对角元以外的元素都是 0, 对角阵也记作 $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

如果 n 阶对角阵 $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 的主对角元全相等, 即 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$, 则称其为数量矩阵.

特别地, 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$ 时, 对应的数量矩阵称为 n 阶单位矩阵, 简称单位阵, 记作 E_n 或 E , 即

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

下面举几个例子, 说明矩阵概念的实际背景.

例 1.1 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1.5)$$

的系数构成的 $m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为方程组 (1.5) 的系数矩阵. 将方程组 (1.5) 的常数项作为第 $n+1$ 列添加到矩阵 A 中构成的 $m \times (n+1)$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

称为方程组(1.5)的增广矩阵, 记作 $\bar{A}$.

方程组(1.5)的常数项构成列矩阵

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为常数项矩阵.

方程组(1.5)的 n 个未知数可组成列矩阵

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

称为未知数矩阵.

例 1.2 甲、乙、丙三名学生的考试成绩见表 1.1:

表 1.1 学生成绩表

单位: 分

学生	成绩			
	英语	体育	计算机	高等数学
甲	85	90	84	78
乙	90	88	91	89
丙	76	92	73	67

考试成绩可用一个 3×4 矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 85 & 90 & 84 & 78 \\ 90 & 88 & 91 & 89 \\ 76 & 92 & 73 & 67 \end{pmatrix}.$$

其中三行分别表示甲、乙、丙三名学生的各门课程成绩, 四列分别表示英语、体育、计算机和高等数学四门课程的成绩.

例 1.3 假设某工厂向三个销售地发送四种产品. 若用 a_{ij} 表示工厂向第 i 个销售地发送第 j 种产品的数量, 那么该工厂发送的产品数量可列成矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

若用 b_{i1} 表示第 i 种产品的单价, b_{i2} 表示第 i 种产品的单件质量, 则四种产品的单价及单件质量也可列成矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}.$$

例 1.4 平面直角坐标系的旋转变换公式为

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta, \end{cases}$$

其中, θ 为 x 轴与 x' 轴的夹角. 显然, 新旧坐标之间的关系可以通过公式中的系数所构成的矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

表示, 称 $\mathbf{A}$ 为上述坐标变换的**变换矩阵**.

在空间中, 保持原点不动的坐标系的变换公式为

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z', \end{cases}$$

它完全由其系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

所确定.

定义 1.2 若矩阵 $\mathbf{A}$ 和矩阵 $\mathbf{B}$ 的行数相等、列数也相等, 则称矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为**同型矩阵**. 如果 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 与 $\mathbf{B} = (b_{ij})$ 是同型矩阵, 且它们的对应元素相等, 即

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n),$$

则称矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相等, 记作 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

习 题 1.1

1. 写出下列增广矩阵所对应的线性方程组.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 3y \\ 2 & -3 & 5 \\ z & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3u & -1 & 3 \\ 2 & v & 5 \\ 2y & 1 & 2x \end{pmatrix}$, 且 $A = B$, 求 x, y, z, u, v

的值.

1.2 矩阵的运算

1.2.1 矩阵的加法

定义 1.3 设有两个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$, 则称矩阵 $(a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ 为矩阵 A 与 B 的和, 记作 $A + B$, 即

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

应该注意, 只有当两个矩阵是同型矩阵时, 这两个矩阵才能进行加法运算.

例 1.5 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$A + B = \begin{pmatrix} 4+1 & 0+1 & 5+1 \\ -1+3 & 3+5 & 2+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

而 $A + C$ 没有意义, 因为 A 与 C 不是同型矩阵.

定义 1.4 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 称矩阵 $(-a_{ij})_{m \times n}$ 为 A 的负矩阵, 记为 $-A$.

由此可以定义矩阵 A 和 B 的减法为

$$A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij}).$$

显然, $A + (-A) = O$.

同型矩阵的加法就是两个矩阵对应元素的加法, 由此易知矩阵的加法满足下列运算规律.

设 A, B, C 是任意三个 $m \times n$ 矩阵, 则

- (1) 交换律: $A + B = B + A$;
- (2) 结合律: $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- (3) $A + O_{m \times n} = O_{m \times n} + A = A$.

1.2.2 数与矩阵的乘法

定义 1.5 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, k 是任一常数, 那么矩阵 $(ka_{ij})_{m \times n}$ 称为数 k 与矩阵 A 的乘积, 简称数乘, 记为 kA 或 Ak , 即

$$kA = Ak = (ka_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

例 1.6 设 A 与 B 如例 1, 则

$$2B = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 1 & 2 \times 1 \\ 2 \times 3 & 2 \times 5 & 2 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 10 & 14 \end{pmatrix},$$

$$A - 2B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 10 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -7 & -7 & -12 \end{pmatrix}.$$

设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵, k, l 为任意两个常数, 则矩阵的数乘运算满足下列运算规律;

- (1) 数乘分配律: $k(A + B) = kA + kB$;
- (2) 数乘分配律: $(k + l)A = kA + lA$;
- (3) 数乘结合律: $k(lA) = (kl)A$;
- (4) $1A = A$.

矩阵的加法与数乘统称为矩阵的线性运算.

1.2.3 矩阵的乘法

下面我们从实际例子引入矩阵与矩阵的乘法.

从 1.1 节的例 1.1 中, 我们已看到, 线性方程组 (1.5) 由系数矩阵 A 和常数项矩阵 b 完

全确定. 现将方程组(1.5)用矩阵 A , X , b 来表示.

首先利用矩阵相等的定义, 线性方程组(1.5)的 m 个等式可以用下列一个等式来表示:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

其中等式两端都是矩阵.

而右端的矩阵完全由系数矩阵 A 和未知数矩阵 X 确定, 我们把它称为矩阵 A 和 X 的乘积, 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

这样, 我们可以把线性方程组(1.5)写成下面矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

简写为 $AX = b$. 这就是我们定义矩阵乘法的依据之一.

定义 1.6 (矩阵与列向量的乘积) 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $C = (c_j)_{n \times 1}$, 则规定 $m \times n$ 矩阵 A 与 n 维列向量($n \times 1$ 矩阵) C 相乘的乘积 AC 是以 $d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}c_j (i=1, 2, \cdots, m)$ 为分量的 m 维列向量($m \times 1$ 矩阵), 即

$$AC = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n \end{pmatrix}.$$

依据定义 1.6, 矩阵 A 与列向量 C 能够相乘的条件是, A 的列数(即 A 的行向量的维数)等于 C 的行数(即 C 的维数). 而乘积 AC 是 m 维列向量.

A 与 C 相乘的规则是, 乘积 AC 的第 i 个分量等于矩阵 A 的第 i 个行向量与列向量 C 的对应分量乘积之和.

例 1.7 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 求 AC .

解 因为 A 是 3×3 矩阵, C 是 3 维列向量 (3×1 矩阵), A 的列数等于 C 的行数, 所以矩阵 A 与 C 可以相乘, 其乘积 AC 是一个 3×1 矩阵. 按定义 (1.6) 有

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 2 \\ 2 \times 1 + 0 \times (-1) + (-2) \times 2 \\ -1 \times 1 + 3 \times (-1) + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

定义 1.7 (矩阵与矩阵的乘积) 设 $A = (a_{ij})_{m \times s}$, $B = (b_{ij})_{s \times n}$, 则由元素

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} \quad (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n) \quad (1.6)$$

构成的 $m \times n$ 矩阵 $C = (c_{ij})_{m \times n}$ 称为矩阵 A 与矩阵 B 的乘积, 记作 AB , 即

$$AB = C = \left(\sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} \right)_{m \times n} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^s a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^s a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^s a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^s a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^s a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^s a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^s a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^s a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^s a_{mk}b_{kn} \end{pmatrix}_{m \times n}.$$

由定义 1.7 可知:

(1) 只有左乘矩阵 A 的列数等于右乘矩阵 B 的行数时, A 与 B 才能相乘, 即 AB 有意义.

(2) 乘积 $C = AB$ 的行数等于矩阵 A 的行数, 列数等于矩阵 B 的列数.

若记 $B_j (j=1, 2, \cdots, n)$ 为矩阵 B 的第 j 个列向量, 由定义 1.6 和定义 1.7 知, 矩阵 A 与 B 的乘积 AB 还可以表示成

$$AB = A(B_1, B_2, \cdots, B_n) = (AB_1, AB_2, \cdots, AB_n).$$

例 1.8 设

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

求 AB .

解 因为 A 是 2×2 矩阵, B 是 2×3 矩阵, A 的列数等于 B 的行数, 所以矩阵 A 与 B 可以相乘, 其乘积 $AB = C$ 是一个 2×3 矩阵. 按式 (1.6) 有

$$\begin{aligned}
 C = AB &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 \times 3 + 0 \times 2 & 3 \times 1 + 0 \times 0 & 3 \times 2 + 0 \times 1 \\ -1 \times 3 + 2 \times 2 & -1 \times 1 + 2 \times 0 & -1 \times 2 + 2 \times 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

若记 $B = (B_1, B_2, B_3)$, 则

$$\begin{aligned}
 AB_1 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 AB_2 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
 AB_3 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

因此

$$AB = A(B_1, B_2, B_3) = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 1.9 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$ 的乘积 AB 及 BA .

解 按式(1.6), 有

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}, \\
 BA &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

在例1.8中, 矩阵 A 是 2×2 矩阵, 矩阵 B 是 2×3 矩阵, 所以乘积 AB 有意义, 而矩阵 B 与 A 却不能相乘, 即 BA 没意义. 由此可知, 在矩阵的乘法中必须注意矩阵相乘的顺序. 而在例1.9中, 虽然乘积 AB 与 BA 都有意义, 且 AB 与 BA 都是二阶方阵, 但 $AB \neq BA$. 因此, 矩阵的乘法不满足交换律, 即在一般情况下, $AB \neq BA$.

对于两个 n 阶方阵 A, B , 若 $AB = BA$, 则称方阵 A 与 B 是可交换的.

例1.9还表明, 尽管矩阵 $A \neq O$, $B \neq O$, 但却有 $AB = O$. 因此需要特别注意: 即使有两个矩阵 A, B 满足 $AB = O$, 也不能得出 $A = O$ 或 $B = O$ 的结论. 同样地, 当 $A \neq O$, 而 $AB = AC$ 时, 有 $A(B - C) = O$, 不能得出 $B = C$ 的结论, 即 $AB = AC$, 且 $A \neq O$, 推不出 $B = C$, 即一般地, 矩阵乘法不满足消去律.

但是, 矩阵的乘法仍满足下列运算规律(假设运算都是可行的):

(1) 结合律: $(AB)C = A(BC)$;

(2) 左乘分配律: $A(B + C) = AB + AC$;

(3) 右乘分配律: $(B + C)A = BA + CA$;

(4) 数乘结合律: $k(AB) = (kA)B = A(kB)$;

(5) $O_{m \times s} A_{s \times n} = O_{m \times n}$, $A_{m \times s} O_{s \times n} = O_{m \times n}$;

(6) $E_m A_{m \times n} = A_{m \times n}$, $A_{m \times n} E_n = A_{m \times n}$, 可简写为 $EA = AE = A$.

可见, 单位矩阵 E 在矩阵乘法中的作用类似于数 1.

由于矩阵的乘法满足结合律, 我们可以定义方阵相乘的方幂.

定义 1.8 若 A 为 n 阶矩阵, k 是正整数, 则 A^k 表示 k 个 A 的乘积, 即

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ 个}},$$

称为 A 的 k 次幂. 并约定 $A^0 = E$.

显然, 矩阵的幂满足以下运算规律:

$$A^k A^l = A^{k+l}, (A^k)^l = A^{kl},$$

其中, k, l 为正整数.

因矩阵乘法不满足交换律, 所以对于同阶方阵 A 与 B , 一般 $(AB)^k \neq A^k B^k$, 只有当 A 与 B 可交换时, 才有 $(AB)^k = A^k B^k$. 类似地, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ 等公式, 也只有当 A 与 B 可交换时才成立.

定义 1.9 设 $f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m$ 为 x 的 m 次多项式, A 为 n 阶矩阵, 则称矩阵

$$f(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \cdots + a_{m-1} A + a_m E$$

为 n 阶矩阵 A 的 m 次多项式.

由定义 1.9 可知, $f(A)$ 可以看成普通多项式 $f(x)$ 当 $x = A$ 的值.

显然, n 阶矩阵 A 的 m 次多项式仍为 n 阶矩阵.

例 1.10 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^3 - 2x + 4$, 求 $f(A)$.

解 因为 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix}$, 所以

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3\lambda & 1 \end{pmatrix},$$

从而

$$f(A) = A^3 - 2A + 4E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3\lambda & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ \lambda & 3 \end{pmatrix}.$$

下面再举两个例子来说明矩阵乘法在多方面的应用.

例 1.11 1.1 节的例 1.3 已得到矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}$,

记 $C = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$, 那么

$$c_{i1} = a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + a_{i3}b_{31} + a_{i4}b_{41} \quad (i = 1, 2, 3)$$

是该工厂向第 i 个销售地所发产品的总价;

$$c_{i2} = a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + a_{i3}b_{32} + a_{i4}b_{42} \quad (i = 1, 2, 3)$$

是该工厂向第 i 个销售地所发产品的总质量.

例 1.12 n 个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 与 m 个变量 $y_1, y_2, \dots, y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n, \end{cases}$$

表示一个从变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \dots, y_m$ 的线性变换, 其中 a_{ij} 为常数.

利用矩阵的乘法, 可记作

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

1.2.4 矩阵的转置

定义 1.10 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, 若将 A 的行顺次换成列, 所得到的 $n \times m$ 矩阵称为 A 的转置矩阵, 记作 A^T . 即, 如果

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

则

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

根据定义, 转置矩阵满足下列运算规律(假设运算都是可行的).

- (1) $(A^T)^T = A$;
- (2) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$;
- (3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
- (4) $(AB)^T = B^T A^T$.

性质(1) ~ (3) 的证明是直接的, 故省略. 这里仅证明性质(4).

设 $A = (a_{ij})_{m \times s}$, $B = (b_{ij})_{s \times n}$, 记 $AB = C = (c_{ij})_{m \times n}$, $B^T A^T = D = (d_{ij})_{n \times m}$. 则

$$(AB)^T = C^T = (c_{ji})_{n \times m},$$

而

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^s a_{jk} b_{ki}, \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^s b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^s a_{jk} b_{ki},$$

所以 $c_{ji} = d_{ij} (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$, 即 $(AB)^T = B^T A^T$.

定义 1.11 若 n 阶矩阵 A 满足 $A^T = A$, 则称 A 为对称矩阵; 若 $A^T = -A$, 则称 A 为反对称矩阵.

显然, 一个 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 是对称矩阵的充要条件是

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 是反对称矩阵的充要条件是它的元素满足

$$a_{ij} = \begin{cases} -a_{ji}, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

即主对角线上的元素为零, 主对角线两侧对称的元素反号.

例如, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 是对称矩阵, 而 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 是反对称矩阵.

例 1.13 设 A 为 n 阶矩阵, 证明:

- (1) AA^T 为对称矩阵;
- (2) $A - A^T$ 为反对称矩阵.

证 (1) 因为 $(AA^T)^T = (A^T)^T (A)^T = AA^T$, 即

$$(AA^T)^T = AA^T.$$

故 AA^T 为对称矩阵.

(2) 因为 $(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$, 即
 $(A - A^T)^T = -(A - A^T)$.

故 $A - A^T$ 为反对称矩阵.

习 题 1.2

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 计算: (1) $3A - B$; (2) AB^T .

2. 计算下列乘积.

(1) $(-2, 3, 1) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (3, -2, 1)$;

(4) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

(5) $(x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求所有与 A 可交换的矩阵.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 3$, 求 $f(A)$.

5. (1) 设 A, B 为 n 阶反对称矩阵, 证明 $AB - BA$ 也是反对称矩阵;

(2) 设 A, B 都是 n 阶对称矩阵, 证明 AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB = BA$.

6. 已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_3, \\ x_2 = -2y_1 + 3y_2 + 2y_3, \\ x_3 = 4y_1 + y_2 + 5y_3, \end{cases} \text{ 与 } \begin{cases} y_1 = -3z_1 + z_2, \\ y_2 = 2z_1 + z_3, \\ y_3 = z_2 + 3z_3, \end{cases}$$

求从 z_1, z_2, z_3 到 x_1, x_2, x_3 的线性变换.

7. (1) 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, 求 A^{100} ;

(2) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, 求 A^4 .

1.3 矩阵的逆

我们已经知道, 矩阵有加法、减法和乘法以及与数的乘法四种运算, 自然会联想到, 矩阵是否能有类似于数的除法那样的运算呢?

我们在考虑两数相除如 $a \div b$ 时, 首先要假定 $b \neq 0$, 即 b 的倒数 b^{-1} 存在, 使 $bb^{-1} = b^{-1}b = 1$. 此时, 除法可利用乘法规定: $a \div b = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot a$. 把数的除法的基本思想应用到矩阵的运算中, 并注意到单位矩阵 E 在矩阵的乘法中的作用与数 1 类似, 由此我们引入矩阵逆的定义.

定义 1.12 设 A 是一个给定的 n 阶矩阵, 若存在 n 阶矩阵 B 使得

$$AB = BA = E$$

成立, 则称 A 是**可逆矩阵**, 并称矩阵 B 为 A 的**逆矩阵**, 简称**逆阵**.

由定义 1.12 可知:

(1) 只有方阵才可以有逆矩阵.

(2) 定义中的矩阵 B 也是可逆矩阵, 且 A 是 B 的逆矩阵.

那么一个 n 阶矩阵具备什么条件时, 它是可逆的? 它的逆矩阵是否唯一? 如何求出它的逆矩阵?

首先, 我们有下面的定理.

定理 1.1 若 A 是可逆矩阵, 则它的逆矩阵是唯一的.

证 用反证法. 设 A 的逆矩阵不止一个. 如果 B, C 是其中两个, 那么有

$$AB = BA = E, AC = CA = E.$$

于是

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C,$$

由此可得 A 的逆矩阵是唯一的.

由于可逆矩阵 A 的逆矩阵是唯一的, 我们将它记为 A^{-1} , 于是

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

可逆矩阵称为**非奇异矩阵**，而不可逆矩阵称为**奇异矩阵**。

例 1.14 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

所以 $B = A^{-1}$ 。

例 1.14 给出了检验二阶矩阵是否可逆的方法，此方法也可用于检验一般 n 阶矩阵是否可逆。另外，容易验证一般二阶矩阵有如下结论。

设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 若 $ad - bc \neq 0$, 则 A 可逆, 且

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

例 1.15 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆。

解 因为 $1 \times 3 - 2 \times 2 = -1 \neq 0$, 所以 A 可逆, 且

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

下面给出可逆矩阵的几个常用性质。

(1) 若 A 是可逆矩阵, 则 A^{-1} 也可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$ 。

(2) 若 A 可逆, 数 $\lambda \neq 0$, 则 λA 可逆, 且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$ 。

(3) 若 A 可逆, 则 A^T 也可逆, 且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ 。

(4) 若 A, B 均为 n 阶可逆矩阵, 则 AB 亦可逆, 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 。

证 这里只证(4), 其他留给读者自证。

因为 A, B 均为可逆矩阵, 所以存在 A^{-1}, B^{-1} , 使得

$$AA^{-1} = E, BB^{-1} = E.$$

于是

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E.$$

类似地, 可以证明 $(B^{-1}A^{-1})(AB) = E$, 因此 AB 是可逆的, 且其逆阵为 $B^{-1}A^{-1}$ 。

一般地, 若 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 均为 n 阶可逆矩阵, 则 $A_1A_2 \cdots A_k$ 亦可逆, 且

$$(A_1A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

即若干个可逆矩阵的积也是可逆的, 且其逆等于这些矩阵的逆按相反顺序的乘积。

当 A 可逆时, 还可定义

$$A^{-k} = (A^{-1})^k,$$

其中 k 为正整数. 这样, 当 A 可逆, k, l 为任意整数时, 有

$$A^k A^l = A^{k+l}, (A^k)^l = A^{kl}.$$

可逆矩阵在线性代数中占有重要地位, 下面举几个例子.

例 1.16 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

分别求满足下列方程的未知矩阵 X : (1) $AX = B$; (2) $XA = B$.

解 (1) 若矩阵 A 可逆, 则用 A^{-1} 左乘 $AX = B$, 有

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

即

$$X = A^{-1}B.$$

不难验证 A 可逆, 且由式(1.7) 知

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

于是

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) 同理, 用 A^{-1} 右乘 $XA = B$, 有

$$XAA^{-1} = BA^{-1},$$

即

$$X = BA^{-1}.$$

于是

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

例 1.17 设 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 且 $AP = PA$, 求 A^n .

解 由式(1.7) 知

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = PAP^{-1}, A^2 = PAP^{-1} \cdot PAP^{-1} = PA^2P^{-1}, \dots, A^n = PA^nP^{-1},$$

而

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}, \dots, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} \\ 1 & 2^{n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 2 \\ 4 - 2^{n+2} & 2^{n+2} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例 1.18 若矩阵 A 可逆, 且满足 $AB = O$ (或 $BA = O$), 证明 $B = O$.

证 因 A^{-1} 存在, 用 A^{-1} 左乘 $AB = O$, 得

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}O = O,$$

而 $A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = EB = B$, 故 $B = O$.

习 题 1.3

1. 设对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

满足 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$, 试验证 A 可逆, 且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & a_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

2. 解下列矩阵方程.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$3. \text{ 设 } P^{-1}AP = A, \text{ 其中 } P = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 求 } A^{11}.$$

4. 设 A 为可逆的对称(反对称)矩阵, 证明其逆矩阵亦为对称(反对称)矩阵.

5. 若矩阵 A 可逆, 且满足 $AB = AC$ (或 $BA = CA$), 证明 $B = C$.

1.4 分块矩阵

1.4.1 分块矩阵的概念

对于行数和列数较高的矩阵, 运算时我们常采用分块法, 使大矩阵的运算化成小矩阵的运算.

一般地, 对于任意一个 $m \times n$ 矩阵 A , 可以用若干条水平直线和竖直线按某种需要把 A 划分成若干个行数与列数较少的矩阵, 这些矩阵称为 A 的子阵或子块. 被划分了的矩阵 A 称为分块矩阵, 这时矩阵 A 的元可能不再是数, 而是一些小矩阵 (A 的子块).

例如, 将 3×4 矩阵 A 分成四块:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

则

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = (a_{31} \quad a_{32}), \quad A_{22} = (a_{33} \quad a_{34})$$

是矩阵 A 的子块, 从而 A 可记为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

这是以子块为元的分块矩阵. 它还可以记为

$$A = (A_{ij})_{2 \times 2}.$$

一个矩阵可以根据不同的需要划分成不同的子块, 构成不同的分块矩阵. 例如, 上述 3×4 矩阵 A 分成如下形式:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

则

$$A = (A_{11} \quad A_{12} \quad A_{13} \quad A_{14}),$$

其中

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \mathbf{A}_{13} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}, \mathbf{A}_{14} = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}.$$

1.4.2 分块矩阵的运算

分块矩阵可以像普通矩阵那样进行运算, 其运算规则与普通矩阵的运算规则相类似, 下面分别进行说明.

1. 分块矩阵的加法

设矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 是同型矩阵, 且 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 采用完全相同的分块方式, 即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{B}_{sr} \end{pmatrix},$$

其中, $\mathbf{A}_{ij}$ 与 $\mathbf{B}_{ij}$ 都是同型矩阵, 则

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij})_{s \times r} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} + \mathbf{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} + \mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} + \mathbf{B}_{sr} \end{pmatrix}.$$

2. 分块矩阵的数乘

设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix}$, k 为常数, 那么

$$k\mathbf{A} = (k\mathbf{A}_{ij})_{s \times r} = \begin{pmatrix} k\mathbf{A}_{11} & \cdots & k\mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ k\mathbf{A}_{s1} & \cdots & k\mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix}.$$

3. 分块矩阵的乘法

设 $\mathbf{A}$ 为 $m \times s$ 矩阵, $\mathbf{B}$ 为 $s \times n$ 矩阵, 且 $\mathbf{A}$ 关于列的分块方式与 $\mathbf{B}$ 关于行的分块方式完全一致, 即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_{t1} & \cdots & \mathbf{B}_{tr} \end{pmatrix},$$

其中, $\mathbf{A}_{i1}, \mathbf{A}_{i2}, \dots, \mathbf{A}_{ir}$ 的列数分别等于 $\mathbf{B}_{1j}, \mathbf{B}_{2j}, \dots, \mathbf{B}_{tj}$ 的行数, 那么

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix},$$

其中

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^l A_{ik} B_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, r).$$

例 1.19 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, 利用分块矩阵求 AB .

解 将 A, B 分块成

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix},$$

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B_1 & E \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix},$$

则

$$AB = \begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & E \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & E \\ A_1 B_1 + B_2 & A_1 + B_3 \end{pmatrix},$$

而

$$A_1 B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1 + B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. 分块矩阵的转置

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, \text{ 则 } A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1t}^T & \cdots & A_{st}^T \end{pmatrix}.$$

5. 分块矩阵的逆

例 1.20 设分块矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$, 其中 A_{11} , A_{22} 分别是 r 阶、 s 阶可逆矩阵, A_{12}

是 $r \times s$ 矩阵, O 是 $s \times t$ 零矩阵. 若 A 可逆, 求 A^{-1} .

解 设逆矩阵 A^{-1} 的分块形式为

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

其中, B_{11} 是 r 阶矩阵, B_{22} 是 s 阶矩阵. 利用分块矩阵乘法有

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix} = E = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & E_s \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{cases} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = E_r, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = O, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{22}B_{21} = O, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{22}B_{22} = E_s. & (4) \end{cases}$$

由方程(3)、(4)及 A_{22} 可逆得

$$B_{21} = A_{22}^{-1}O = O, \quad B_{22} = A_{22}^{-1}E_s = A_{22}^{-1}.$$

因此方程(1)简化为

$$A_{11}B_{11} + O = E_r.$$

因 A_{11} 可逆, 得 $B_{11} = A_{11}^{-1}$. 最后由方程(2), $A_{11}B_{12} = -A_{12}B_{22} = -A_{12}A_{22}^{-1}$, 从而

$$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}.$$

于是

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

6. 分块对角矩阵

设 A 为 n 阶方阵, 若 A 的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块, 其余子块都为零矩阵, 且在对角线上的子块都是方阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ O & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 都是方阵, 那么称 A 为分块对角矩阵, 也称为准对角矩阵.

(1) 两个同型的分块对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ O & & & A_s \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & O \\ & B_2 & \\ & & \ddots \\ O & & & B_s \end{pmatrix}$$

[其中 A_i 与 $B_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 是同阶方阵] 的乘积

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & & O \\ & A_2 B_2 & \\ & & \ddots \\ O & & & A_s B_s \end{pmatrix}$$

仍为同型的分块矩阵.

(2) 分块对角矩阵 A 可逆的充要条件是主对角线上的子块 $A_1, A_2, \dots, A_s$ 均可逆, 且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & O \\ & A_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ O & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 1.21 设 $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

解 因 $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$, 且

$$A_{11} = (5), \quad A_{11}^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right), \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{22}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

所以

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

对矩阵分块时, 有两种分块法应予特别重视, 那就是按列分块和按行分块.

$m \times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 有 n 列, 称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的 n 个列向量, 若第 j 列记作

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

则 $\mathbf{A}$ 可按列分块为

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n);$$

同样, $m \times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 有 m 行, 称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的 m 个行向量, 若第 i 行记作

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}),$$

则 $\mathbf{A}$ 可按行分块为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^T \end{pmatrix}.$$

对于矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 与矩阵 $\mathbf{B} = (b_{ij})_{s \times n}$ 的乘积矩阵 $\mathbf{AB} = \mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times n}$, 若把 $\mathbf{A}$ 按行分成 m 块, 把 $\mathbf{B}$ 按列分成 n 块, 便有

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_n) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^T \boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^T \boldsymbol{\beta}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^T \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^T \boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^T \boldsymbol{\beta}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^T \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\alpha}_m^T \boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_m^T \boldsymbol{\beta}_n \end{pmatrix} = (c_{ij})_{m \times n},$$

其中

$$c_{ij} = \boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{\beta}_j = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{is}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj},$$

由此可进一步领会矩阵相乘的定义.

利用矩阵的按列(按行)分块, 还可以给出线性方程组的另一矩阵表示形式. 线性方

程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

的矩阵乘积形式为

$$\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{X}_{n \times 1} = \mathbf{b}_{m \times 1}.$$

上式中, 把 $\mathbf{A}$ 按列分块, 把 $\mathbf{X}$ 按行分块, 由分块矩阵的乘法有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{b},$$

即

$$x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{b}. \quad (1.8)$$

或

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

习 题 1.4

1. 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

用矩阵的分块乘法计算 $\mathbf{AB}$.

2. 设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 及 s 阶矩阵 $\mathbf{B}$ 都可逆, 求:

$$(1) \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix}^{-1};$$

$$(2) \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1}.$$

3. 求下列矩阵的逆矩阵.

$$(1) \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

求 A^n 及 A^{-1} .