

目 录

第一篇 线性代数 (32 课时+16 选学课时)

第 1 章 行列式	3
1.1 行列式的定义	3
1.2 行列式的性质与计算	10
1.3 克拉默法则	17
习题 1	20
第 2 章 矩阵	23
2.1 矩阵及其运算	23
2.2 矩阵的逆	31
2.3 矩阵的初等变换	34
2.4 矩阵的秩	44
习题 2	49
第 3 章 向量与向量组	51
3.1 n 维向量	51
3.2 向量组的线性相关性	53
3.3 向量组间的关系与极大线性无关组	58
3.4 向量组的秩	60
习题 3	62
第 4 章 线性方程组	65
4.1 线性方程组的消元解法	65

4.2 线性方程组解的判定	70
4.3 线性方程组解的结构	76
习题 4	85
第 5 章 矩阵的特征值	88
5.1 特征值与特征向量	88
5.2 相似矩阵	94
5.3 矩阵的对角化	95
习题 5	99
 第二篇 概率论 (32 课时) 	
第 6 章 随机事件概率与随机变量	103
6.1 随机事件与概率	103
6.2 随机变量的分布函数与分布密度	115
6.3 常用的随机变量及其分布	122
6.4 随机变量函数的分布	128
习题 6	131
第 7 章 二维随机变量及其分布	133
7.1 二维随机变量与边缘分布	133
7.2 条件分布与随机变量的独立性	141
7.3 二维随机变量函数的分布	147
习题 7	151
第 8 章 数字特征与中心极限定理	153
8.1 数学期望	153
8.2 方差与协方差	161
8.3 大数定理与中心极限定理	165
习题 8	171

第三篇 统计学

(16 课时)

第 9 章 统计基础和点估计	175
9.1 总体和样本	175
9.2 统计量	178
9.3 三个常用分布	181
9.4 抽样分布	185
9.5 点估计	186
习题 9	192
第 10 章 区间估计与假设检验	195
10.1 参数的区间估计	195
10.2 假设检验的基本概念	201
10.3 单个正态总体参数的显著性检验	202
10.4 两个正态总体参数的显著性检验	207
10.5 χ^2 拟合优度检验*	210
习题 10	213

第四篇 复变函数

(24 课时)

第 11 章 复数与复变函数	217
11.1 复数及其运算	217
11.2 复数的几何表示	219
11.3 复变函数的极限与连续	223
11.4 初等复变函数	227
习题 11	231
第 12 章 复变函数的导数与积分	233
12.1 复变函数的导数与微分	233

12.2 解析函数	236
12.3 复变函数的积分	243
12.4 基本积分公式与高阶导数公式	245
习题 12	249
第 13 章 复级数与留数	251
13.1 复级数	251
13.2 泰勒级数与洛朗级数	255
13.3 留数的概念与计算	262
13.4 留数定理与应用	268
习题 13	274
参考文献	276
附表	277

The background of the page features several concentric blue circles of varying shades, creating a dynamic, swirling effect. The circles are centered around the text, with the largest circle framing the entire content area. The colors range from a light sky blue to a deeper cerulean blue.

第一篇

线性代数

(32课时+16 选学课时)





行 列 式

行列式是线性代数中的一个基本概念，它产生于解线性方程组的过程之中。它不仅是研究线性方程组的一个基本工具，也在其他数学分支及科技领域中得到广泛的应用。

本章的主要内容是介绍行列式的定义、性质、计算以及克拉默法则。

1.1 行列式的定义

1.1.1 二阶行列式

行列式起源于求解线性方程组。先看用消元法求解二元一次线性方程组的过程：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (1.1)$$

以 a_{22} 与 $-a_{12}$ 分别依次乘以式 (1.1) 的第一个方程与第二个方程的两端，然后用第一个方程加上第二个方程，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

类似地，消去 x_1 ，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ，则方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (1.2)$$

可以注意到，解的分母 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ 由方程组未知量的系数组成，将它用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

称为二阶行列式. 其中, a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} 称为二阶行列式的**元素**, 横排称为**行**, 竖排称为**列**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**, 表明该元素位于第 i 行; 第二个下标 j 称为**列标**, 表明该元素位于第 j 列. 行列式中从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**, 从右上角到左下角的对角线称为行列式的**副对角线**. 于是, 二阶行列式的值便等于主对角线上的两个元素之积减去副对角线上的两个元素之积. 这种计算方法称为行列式的**对角线法则**.

二阶行列式的计算, 可用图线的方法表示和记忆. 如图 1.1 所示, 二阶行列式的计算方法为: 主对角线(实线)上两元素之积减去副对角线(虚线)上两元素之积.

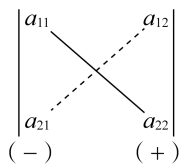


图 1.1

利用二阶行列式的概念, 若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则式(1.2) 可以写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (1.3)$$

式(1.3) 即为二元线性方程组的求解公式. 其中, 分母 D 是由方程组未知量的系数确定的二阶行列式, 被称为**系数行列式**; x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1 , b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11} , a_{21} 所得的二阶行列式, x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1 , b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12} , a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1.1 求解二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ x_1 - 2x_2 = 3. \end{cases}$$

解 由于 $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -7 \neq 0$, 故该方程组有解, 且有

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \times (-2) - 3 \times 3 = -17,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times 1 = 2.$$

因此, 方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{17}{7}, x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{2}{7}.$$

1.1.2 三阶行列式

类似地, 对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad (1.4)$$

用记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为三阶行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

由上述定义可见, 三阶行列式的展开式有六项, 每项均为不同行、不同列的三个元素之积再冠以正号或负号, 其计算方法可用对角线法则描述.

对角线法则如图 1.2 所示.

若令

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

当系数行列式 $D \neq 0$ 时, 式(1.4) 的求解公式为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

注: 对角线法则只适用二、三阶行列式的计算.

例 1.2 求解下列线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

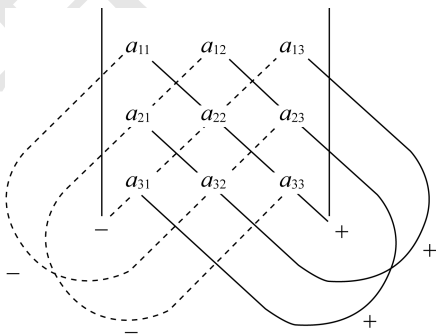


图 1.2

解 由于 $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 \times 4 + (-1) \times (-2) \times 3 + (-1) \times 3 \times (-2) -$

$(-1) \times 4 \times 3 - (-1) \times 3 \times 4 - 2 \times (-2) \times (-2) = 60 \neq 0$, 故该方程组有解, 且有

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 180,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 60,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 60.$$

因此, 方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{180}{60} = 3, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{60}{60} = 1, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{60}{60} = 1.$$

1.1.3 排列与逆序数

定义 1.1 由 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级全排列 (简称排列).

例如: $1\ 2, 2\ 1$ 为 2 级排列.

$1\ 2\ 3\ 4, 4\ 3\ 2\ 1$ 为 4 级排列.

$n(n-1)(n-2)\cdots 2\ 1$ 为 n 级排列.

在 n 级排列中, $1\ 2\ 3\ \cdots\ n$ 是唯一按自然顺序 (即递增顺序) 构成的排列, 被称为 n 级自然排列 (或称 n 级标准排列).

例如: $1\ 2\ 3$ 为 3 级自然排列.

$1\ 2\ 3\ 4\ 5$ 为 5 级自然排列.

除自然排列以外, 其余的排列中, 都有较大的数排在较小的数前面的情况.

定义 1.2 在一个排列中, 如果某个较大的数排在一个较小的数的前面, 则称这两个数 (或这个数对) 构成一个逆序. 一个排列中, 逆序的总数称为这个排列的逆序数.

一个排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数, 一般记为 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$.

例如: $\tau(3\ 2\ 1) = 3, \tau(1\ 2\ 3\ 4) = 0, \tau(1\ 2\ 5\ 3\ 4) = 2$.

定义 1.3 逆序数为偶数 (或零) 的排列被称为偶排列, 逆序数为奇数的排列被称为奇排列.

例 1.3 计算以下各排列的逆序数, 并指出它们的奇偶性.

(1) $4\ 2\ 5\ 3\ 1$ (2) $1\ 3\ 5\ \cdots (2n-1)\ 2\ 4\ 6\ \cdots 2n$.

解 (1) 对于所给的排列, 4 排在首位, 逆序个数为 0; 2 的前面有一个比它大的数,

逆序个数为1; 5的前面没有比它大的数, 逆序个数为0; 3的前面有两个比它大的数, 逆序个数为2; 1的前面有四个比它大的数, 逆序个数为4. 把这些数加起来, 即

$$0 + 1 + 0 + 2 + 4 = 7.$$

故排列4 2 5 3 1的逆序数为7, 即 $\tau(4\ 2\ 5\ 3\ 1) = 7$, 因而是奇排列.

(2) 同理可得

$$\tau[1\ 3\ 5\cdots(2n-1)\ 2\ 4\ 6\cdots 2n] = 0 + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

当 $n = 4k$ 或 $4k+1$ 时, 为偶排列; 当 $n = 4k+2$ 或 $4k+3$ 时, 为奇排列.

1.1.4 对换

定义 1.4 在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中, 将某两个数 i_s 与 i_t 对调, 得到另一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$, 这种对排列的变换被称为**对换**, 记为 (i_s, i_t) ; 将相邻两数对换, 即相邻对换(或称为邻换).

定理 1.1 任意一个排列经过一次对换后, 其奇偶性改变.

例如: $\tau(4\ 3\ 5\ 2\ 1) = 8$ (偶排列), $\tau(4\ 2\ 5\ 3\ 1) = 7$ (奇排列).

定理 1.2 由 n 个自然数($n > 1$)组成的 n 级排列总共有 $n!$ 个, 其中奇偶排列各占一半.

1.1.5 n 阶行列式

1. 概念的引入

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

规律:

- (1) 三阶行列式共有 $3!$ 项;
- (2) 每一项都是位于不同行、不同列的3个元素的乘积;
- (3) 每一项可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ (正负号除外), 其中 $j_1j_2j_3$ 是1, 2, 3的某个排列;
- (4) 当 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时, 对应的项取正号; 当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时, 对应的项取负号.

2. n 阶行列式的定义

定义 1.5 由 n^2 数组成的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积的代数和

$$\sum (-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

其中, $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个 n 级排列, τ 为这个排列的逆序数. 这一定义可以写成:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

规律:

- (1) n 阶行列式共有 $n!$ 项;
- (2) 每一项都是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积;
- (3) 每一项可以写成 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ (正负号除外), 其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的某个排列;
- (4) 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时, 对应的项取正号; 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时, 对应的项取负号.

例 1.4 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 根据定义, D 的展开式应有 $4! = 24$ 项, 考虑其一般项 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$, 由于第一行中除 a_{14} 外其余元素全为 0, 故只考虑 $j_1 = 4$; 同理, 只需考虑 $j_2 = 3, j_3 = 2, j_4 = 1$, 这就是说, 行列式不为 0 的项只有 $a_{14} a_{23} a_{32} a_{41}$, 而 $\tau(4 3 2 1) = 6$, 这一项前面的符号应该是正的, 因此有

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

定理 1.3 n 阶行列式的一般项可以写成

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n) + \tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n},$$

其中, $p_1 p_2 \cdots p_n$ 与 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 均为 n 级排列.

由定理 1.3 可知, 行列式也可以被定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n) + \tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n}.$$

若将行列式中各项的列下标按自然顺序排列, 而将相应行下标的排列设为 $i_1 i_2 \cdots i_n$, 于是行列式又可被定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

例 1.5 确定在四阶行列式的展开式中项 $a_{21}a_{34}a_{43}a_{12}$ 前面所带的符号.

解 因为 $a_{21}a_{34}a_{43}a_{12} = a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$, 且

$$(-1)^{\tau(2\ 3\ 4\ 1) + \tau(1\ 4\ 3\ 2)} = (-1)^6 = 1,$$

$$(-1)^{\tau(2\ 1\ 4\ 3)} = (-1)^2 = 1.$$

所以这一项前面所带的符号是正号.

1.1.6 特殊行列式

1. 三角形行列式

定义 1.6 若行列式 D 主对角线以上或以下的元素全为零, 则称行列式 D 为三角形行列式.

例如:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ 为下三角形行列式;}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ 为上三角形行列式.}$$

由行列式定义可知

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}.$$

同理可得

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

结论：三角形行列式的值等于主对角线上各元素之积。

2. 对角行列式

若行列式 D 主对角线以外的元素全为零，则称 D 为对角行列式，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

实际上，对角行列式是特殊的三角形行列式，它的值为主对角线上各元素之积，即

$$D = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

3. 反对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{(n-1)2}a_{n1}.$$

1.2 行列式的性质与计算

由行列式的定义可知，一个 n 阶行列式展开共有 $n!$ 项，而每一项都是 n 个元素的积，同时还要确定其正负号，因此，除二、三阶行列式外，直接用定义来计算行列式的值是较困难的。为了能够简便地计算行列式，本节将介绍行列式的主要性质和行列式的展开定理，以便将复杂行列式、高阶行列式的计算化为简单行列式、低阶行列式的计算。

1.2.1 行列式的性质

把行列式的行换成行列式的列，列换成行，所得的行列式记为 D^T ，称其为 D 的转置行列式，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由 D 转为 D^T , D 的主对角线上的元素不动, 而只需把 D 以主对角线翻转.

性质 1.1 行列式与它的转置行列式相等.

例如:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad D^T = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad D = D^T.$$

性质 1.1 表明, 行列式中行与列的地位是对等的, 即行列式中行具有的性质, 其列也具有.

性质 1.2 互换行列式的两行(列), 行列式反号.

注: 交换第 i 行(列) 和第 j 行(列), 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$ 或 $c_i \leftrightarrow c_j$.

$$\text{例如: } \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -196, \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 196, \quad \text{于是} \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

推论 1.1 若行列式有两行(列) 元素对应相等, 则行列式为零.

性质 1.3 行列式的某一行(列) 中所有元素都乘以同一个数 k , 等于用数 k 乘以此行(列)式, 记作 kr_i 或 kc_i .

例如:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

根据三阶行列式的对角线法则, 有

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(ka_{22})a_{33} + a_{12}(ka_{23})a_{31} + a_{13}(ka_{21})a_{32} \\ &\quad - a_{13}(ka_{22})a_{31} - a_{12}(ka_{21})a_{33} - a_{11}(ka_{23})a_{32} \\ &= k(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) \\ &= kD. \end{aligned}$$

推论 1.2 行列式中某一行(列) 的所有元素的公因子, 可以提到行列式符号的外面.

推论 1.3 若行列式中有一行(列) 的元素全为零, 则此行列式为零.

性质 1.4 若行列式中有两行(列) 元素对应成比例, 则此行列式为零.

例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & ka_{14} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0.$$

性质 1.5 若行列式的某行(列)的元素都是两个数之和,则此行列式等于相应的两个行列式的和.

例如:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

注:该性质可以推广到某一行(列)为多组数和的情形.

性质 1.6 把行列式某一行(列)的元素乘以数 k ,加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

注:以数 k 乘第 i 行(列)加到第 j 行(列)上,记作 $r_j + kr_i$ 或 $c_j + kc_i$.

例如:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{33} & a_{33} \end{vmatrix},$$

则 $D = D_1$.

例 1.6 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & c & b & d \\ c & a & b & d \\ c & a & d & b \\ a & c & d & b \end{vmatrix}.$$

解 将第一行乘以 -1 加到第四行,将第二行乘以 -1 加到第三行,得

$$D \xrightarrow[r_4 + (-1) \times r_1]{r_3 + (-1) \times r_2} \begin{vmatrix} a & c & b & d \\ c & a & b & d \\ 0 & 0 & d - b & b - d \\ 0 & 0 & d - b & b - d \end{vmatrix} = 0.$$

例 1.7 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解 行列式 D 的主对角线上的元素全为 a ，其余元素全为 b ，注意到行列式的每一行的元素之和是相同的，因此将第 2, 3, $\dots$, n 列都加到第一列，然后提出第一列的公因子 $a + (n-1)b$ ，得到

$$\begin{aligned}
 D &= [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow[i=2, 3, \dots, n]{r_i - r_1} [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} \\
 &= [a + (n-1)b] (a-b)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

1.2.2 余子式、代数余子式

定义 1.7 在行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的所有元素，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按照原来的排法构成的 $n-1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

被称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij} 。记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

被称为元素 a_{ij} 的代数余子式。

由定义可知， A_{ij} 与行列式中第 i 行、第 j 列的元素无关。例如：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}.$$

结论：因为行标和列标可唯一标识行列式的元素，所以行列式中每一个元素都分别对应着一个余子式和一个代数余子式。

1.2.3 行列式按行(列)展开定理

定理 1.4 行列式 D 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

定理 1.4 被称为行列式的**按行(列)展开定理**，也被称为**拉普拉斯展开定理**。

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \end{aligned}$$

例 1.8 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 由定理 1.4，按第一行展开得

$$\begin{aligned} D &= 2 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 2 - 4 \times (-6 - 15) = 88. \end{aligned}$$

例 1.9 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4 + c_3]{c_1 + (-2)c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 40. \end{aligned}$$

例 1.10 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+5} \times 2 \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 + r_1]{r_2 + (-2)r_1} -10 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = -10 \cdot (-2) \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 20(-42 - 12) = -1080. \end{aligned}$$

推论 1.4 行列式 D 中任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零, 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j),$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j).$$

例 1.11 求方程 $f(x) = 0$ 的根, 其中

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-1 & x-2 & x-1 & x \\ x-2 & x-4 & x-2 & x \\ x-3 & x-6 & x-4 & x-1 \\ x-4 & x-8 & 2x-5 & x-2 \end{vmatrix}.$$

解 由观察可知 $x = 0$ 是一个根, 因为 $x = 0$ 时, 行列式第 1, 2 列成比例, 所以 $f(0) = 0$. 展开这个行列式求其他根, 先将第 1 列乘 -1 加到第 2, 3, 4 列, 再将变换后的第 2 列加到第 4 列, 即得

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 1 \\ x-2 & -2 & 0 & 2 \\ x-3 & -3 & -1 & 2 \\ x-4 & -4 & x-1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 0 \\ x-2 & -2 & 0 & 0 \\ x-3 & -3 & -1 & -1 \\ x-4 & -4 & x-1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ x-2 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ x-1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -x(x+1), \end{aligned}$$

所以方程 $f(x) = 0$ 有两个根: 0 和 -1 .

例 1.12 设

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix},$$

D 的 (i, j) 元的余子式和代数余子式依次记作 M_{ij} 和 A_{ij} , 求:

$$A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} \text{ 及 } M_{11} + M_{21} + M_{31} + M_{41}.$$

解

$$\begin{aligned} A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_4 + r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 + c_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{11} + M_{21} + M_{31} + M_{41} &= A_{11} - A_{21} + A_{31} - A_{41} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4 + r_3} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_3} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

1.2.4 范德蒙德行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

其中, 连乘积

$$\prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_2) \cdots (x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_{n-2}) \cdots (x_n - x_{n-1})$$

是满足条件 $1 \leq j < i \leq n$ 的所有因子 $(x_i - x_j)$ 的乘积.

例 1.13 求下列行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 9 \\ -1 & 8 & -8 & 27 \end{vmatrix}.$$

解 因为该行列式为范德蒙德行列式, 其中:

$$x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = -2, x_4 = 3,$$

所以

$$D = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) = 240.$$

1.3 克拉默法则

本节将利用 n 阶行列式的理论来讨论一类特殊的线性方程组, 即方程的个数与未知量的个数相等的线性方程组. 我们将得出与二元、三元线性方程组相似的结论.

1.3.1 克拉默法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么线性方程组有解, 并且解是唯一的, 解可以表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中, D_j 是把行列式 D 中第 j 列换成常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所得的行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

定理 1.5 如果线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$, 则方程组一定有解, 且解是唯一的.

推论 1.5 如果线性方程组无解, 或有两个不同的解, 则它的系数行列式必为零.

注: 克拉默法则只能应用于系数行列式不为零且含 n 个未知量、 n 个方程的线性方程组, 至于方程组的系数行列式为零的情形, 将在后面的一般情形中讨论.

例 1.14 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27,$$

于是, 方程组有唯一的解 $x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = -1, x_4 = 1$.

1.3.2 齐次线性方程组

当方程组右边的常数项全部为零时, 方程组为齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

显然, 齐次线性方程组总是有解的, 因为 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 就是它的一个解, 这个解被称为齐次线性方程组的零解.

若有一组不全为零的数, 它是齐次线性方程组的解, 则称它为齐次线性方程组的非零解.

定理 1.6 如果齐次线性方程组的系数行列式不等于零, 则齐次线性方程组没有非零解, 即只有零解.

推论 1.6 齐次线性方程组存在非零解的充分必要条件是齐次线性方程组的系数行列式必为零.

例 1.15 λ 为何值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} (5 - \lambda)x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + (6 - \lambda)x_2 = 0, \\ 2x_1 + (4 - \lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解?

解 方程组的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6 - \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)(2 - \lambda)(8 - \lambda).$$

若方程组有非零解, 则它的系数行列式 $D = 0$, 从而有 $\lambda = 2, \lambda = 5, \lambda = 8$.

容易验证, 当 $\lambda = 2$, $\lambda = 5$, 或 $\lambda = 8$ 时, 齐次线性方程组有非零解.

例 1.16 求四个平面 $a_ix + b_iy + c_iz + d_it = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ 相交于一点 (x_0, y_0, z_0) 的必要条件.

解 把平面方程写成

$$a_ix + b_iy + c_iz + d_it = 0,$$

其中, $t = 1$. 四个平面交于一点, 等价于含 x, y, z, t 的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3t = 0, \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4t = 0 \end{cases}$$

有唯一的一组非零解 $(x_0, y_0, z_0, 1)$. 根据齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是系数行列式等于 0, 则四个平面相交于一点的必要条件为

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

习 题 1

1. 求下列各排列的逆序数.

(1) 3 4 1 7 8 2 6 5 9;

(2) 9 8 7 6 5 4 3 2 1;

(3) $n(n-1)\cdots 3 2 1$;

(4) $1 3 \cdots (2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$.

2. 求出 j, k 使 9 级排列 2 4 j 1 5 7 k 9 8 为偶排列.

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{22}a_{34}$ 的项.

4. 在六阶行列式中, 下列各项应带什么符号?

(1) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$;

(2) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$.

5. 用定义计算下列各行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

6. 计算下列各行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} ab & -ac & -ae \\ -bd & cd & -de \\ -bf & -cf & -ef \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ 1 & b & -1 & 0 \\ 0 & 1 & c & -1 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

7. 计算下列 n 阶行列式.

$$(1) D_n = \begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix};$$

$$(2) D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix};$$

$$(3) D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix};$$

$$(4) D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

8. 计算 n 阶行列式.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

9. 已知四阶行列式 D 中第3列元素依次为 $-1, 2, 0, 1$, 它们的余子式依次为 $8, 7, 2, 10$, 求行列式 D 的值.

10. 用克拉默法则解下列方程组.

$$(1) \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 = 2; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_1 - x_3 = 4; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

11. λ 满足什么条件时, 线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1, \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}$$

有唯一解?

12. λ 和 μ 为何值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解?

13. 求三次多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, 使得

$$f(-1) = 0, f(1) = 4, f(2) = 3, f(3) = 16.$$

第 2 章



矩阵

矩 阵

线性代数是数学中十分重要的一个分支，其研究得最多的内容就是矩阵。矩阵是一个按照长方阵列排列的复数或实数集合，最早来自方程组的系数及常数所构成的方阵。矩阵是线性代数中最常见的工具之一，其有着广泛的应用。

本章主要介绍矩阵及其运算、矩阵的逆、矩阵的初等变换与矩阵的秩等。

2.1 矩阵及其运算

2.1.1 矩阵的概念

下面通过两个例子来研讨矩阵在日常生活中的作用。

四种粮食在三家粮站中，单位量的售价可用一个矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}.$$

其中， a_{ij} ($i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3$) 为第 i 种粮食在第 j 家粮站的单位量售价。

在解析几何中考虑坐标变换时，如果只考虑坐标系的转轴（逆时针方向转轴），那么平面直角坐标变换的公式为

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta. \end{cases} \quad (2.1)$$

其中， θ 为 x 轴与 x' 轴的夹角。显然，新旧坐标之间的关系可以通过公式 (2.1) 中系数所排成的 2×2 矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

表示出来. 通常, 矩阵(2.2)称为坐标变换公式(2.1)的矩阵. 在空间的情形, 保持原点不动的仿射坐标系的变换有公式

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'. \end{cases} \quad (2.3)$$

同样, 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

就被称为坐标变换公式(2.3)的矩阵.

定义 2.1 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ 排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵, 简称 $m \times n$ 矩阵, 其中数 a_{ij} 称为矩阵位于第 i 行第 j 列处的元素. 矩阵可简记为 A . 如上述定义中的矩阵可记为 $A_{m \times n}$ 或 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 或 $A = (a_{ij})$. 矩阵常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 来表示.

例如, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ 是一个 3×3 的矩阵.

在 $m \times n$ 矩阵 A 中, 如果 $m = n$, 则称 A 为 n 阶方阵. 如果矩阵 A 的元素 a_{ij} 全为实(复)数, 则称 A 为实(复)矩阵.

只有一行的矩阵

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

则称 A 为行矩阵; 只有一列的矩阵

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则称 B 为列矩阵.

元素都是零的矩阵称为零矩阵, 记作 O .

如果矩阵 A 和矩阵 B 的行数和列数相等, 并且它们对应位置上的元素相等, 即 $a_{ij} = b_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$, 则称矩阵 A 与矩阵 B 相等, 记作 $A = B$.

在 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 中, 位于第 i 行与第 i 列交叉位置的元素 $a_{ii} (i = 1, 2, \dots, n)$ 为方阵 A 的主对角线元素, 其所在的对角线为方阵的主对角线. 下面介绍几种常见的特殊方阵.

1. 三角形矩阵

如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 中的元素满足条件 $a_{ij} = 0 (i > j; i, j = 1, 2, \dots, n)$, 即 A 的主对角线以下的元素全为零, 则称 A 为 n 阶上三角形矩阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 中的元素满足条件 $a_{ij} = 0 (i < j; i, j = 1, 2, \dots, n)$, 即 A 的主对角线以上的元素全为零, 则称 A 为 n 阶下三角形矩阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

上三角形矩阵与下三角形矩阵被统称为三角形矩阵.

2. 对角矩阵

如果 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 中的元素满足 $a_{ij} = 0 (i \neq j)$, 即 A 的主对角线以外的元素全为零, 则称 A 为 n 阶对角矩阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

也记作 $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

3. 数量矩阵

如果 n 阶对角矩阵 $A = (a_{ij})$ 中的元素满足 $a_{ii} = a (i = 1, 2, \dots, n)$, 则称 A 为数量矩阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

4. 单位矩阵

如果 n 阶对角矩阵 $A = (a_{ij})$ 中的元素满足 $a_{ii} = 1 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则称 A 为单位矩阵, 记为 E_n , 简记为 E , 即

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.2 矩阵的运算

1. 矩阵的加法

定义 2.2 设有两个 $m \times n$ 矩阵

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$B = (b_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

则矩阵

$$C = (c_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

被称为矩阵 A 与 B 的和, 记作

$$C = A + B.$$

矩阵加法运算规律:

- (1) (交换律) $A + B = B + A$;
- (2) (结合律) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

例 2.1 求 $A + B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 7 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 6 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

解 $A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+0 & 4+4 \\ 2+(-3) & 0+6 & (-1)+(-1) \\ 7+1 & (-3)+3 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 8 \\ -1 & 6 & -2 \\ 8 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

2. 数与矩阵相乘

定义 2.3 数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA , 规定为

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

数乘矩阵满足下列运算规律:

- (1) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
- (2) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
- (3) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A)$;
- (4) $1 \cdot A = A$.

设矩阵 $A = (a_{ij})$, 则称 $-A = (-a_{ij})$ 为 A 的负矩阵, 容易得到 $A + (-A) = O$. 由此定义矩阵的减法为 $A - B = A + (-B)$.

例 2.2 已知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

求 $2A + 2B$.

解 由于 $2A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 8 & 4 & 12 \end{pmatrix}$, $2B = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, 故

$$2A + 2B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 10 & 10 & 16 \end{pmatrix}.$$

例 2.3 求 X , 使 $A + X = B$. 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 1 & -2 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

解 $X = B - A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 1 & -2 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & -5 & 8 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$

3. 矩阵与矩阵相乘

定义 2.4 设 $A = (a_{ij})_{m \times s}$, $B = (b_{ij})_{s \times n}$, 称 $C = (c_{ij})_{m \times n}$ 为矩阵 A 与矩阵 B 的乘积, 记为 $C = AB$. 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n),$$

即矩阵 A 与 B 的乘积 C 的第 i 行第 j 列元素等于第一个矩阵 A 的第 i 行与第二个矩阵 B 的第 j 列对应元素乘积之和.

注意: (1) 只有当第一个矩阵(左矩阵)的列数与第二个矩阵(右矩阵)的行数相等时, 两个矩阵才能相乘. 两个矩阵相乘所得矩阵的行数同第一个矩阵(左矩阵)的行数, 列数同第二个矩阵(右矩阵)的列数.

特别地, 一个 $1 \times s$ 行矩阵与一个 $s \times 1$ 列矩阵的乘积是一个 1 阶方阵, 也就是一个数.

例如, $(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 = 14$. 又如, 若 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是一次齐次线性方

程组的系数矩阵, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 分别是两个 $n \times 1$ 矩阵, 那么该齐次线性方程组可以

写成矩阵的形式 $Ax = O$.

(2) 当 $AB = O$ 时, 不一定有 $A = O$ 或 $B = O$.

(3) 矩阵的乘法不满足消去律, 即当 $AC = BC$, 且 $C \neq O$ 时, 不一定有 $A = B$.

例 2.4 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 求 AB , BA .

解 $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 0 \times 3 & 2 \times 2 + 0 \times 4 \\ 1 \times 1 + 2 \times 3 & 1 \times 2 + 2 \times 4 \\ 3 \times 1 + 1 \times 3 & 3 \times 2 + 1 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 10 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}.$

因为矩阵 B 的列数为 2, 矩阵 A 的行数为 3, 两者不等, 所以 BA 没有意义.

由此可见, 矩阵的乘法不满足交换律, 即在一般情况下, $AB \neq BA$. 但是也有例外.

例 2.5 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 AB 及 BA .

解 $AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $AB = BA$.

例 2.6 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, 求 AB 和 AC .

解 $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 虽然 $AB = AC$, 但是 $B \neq C$.

矩阵乘法满足下列运算规律: (假设下列各式等号两边的运算都可进行)

- (1) $(AB)C = A(BC)$;
 (2) $A(B + C) = AB + AC$;
 (3) $(B + C)A = BA + CA$;
 (4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, 其中 λ 为常数.

尽管矩阵的乘法一般不满足交换律, 但对于单位矩阵 E 和 $m \times n$ 矩阵 $A_{m \times n}$, 容易验证

$$E_m A_{m \times n} = A_{m \times n} E_n = A_{m \times n}.$$

特别地, 如果 A 是 n 阶矩阵, E 是 n 阶单位矩阵, 对于任意常数 k, l , 有:

- (1) $EA = AE = A$;
 (2) $kA = (kE)A = A(kE)$;
 (3) $kE + lE = (k + l)E$;
 (4) $(kE)(lE) = (kl)E$.

有了矩阵的乘法, 就可以定义 n 阶方阵的幂.

定义 2.5 设 A 是 n 阶方阵, 规定 A 的 k 次幂为 k 个 A 的乘积, 记作 A^k , 即

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \uparrow}.$$

由定义可知, $A^1 = A$, $A^{k+1} = A^k A^1$.

方阵的幂满足下列运算规律:

$$A^m A^n = A^{m+n}, (A^m)^n = A^{mn}, \text{ 其中 } m, n \text{ 为正整数.}$$

但是, 由于矩阵乘法一般不满足交换律, 所以对于两个 n 阶方阵 A, B , 一般来说

$$(AB)^k \neq A^k B^k.$$

定义 2.6 设 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$ 是 x 的 m 次多项式, A 是 n 阶方阵, 则

$$f(A) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m$$

被称为矩阵 A 的 m 次多项式.

例 2.7 已知 $A = BC$, 其中

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

求 A^2, A^{10} .

$$\text{解 } A = BC = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -2 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}, A^2 = (BC)(BC) = B(CB)C,$$

$$\text{而 } CB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2, \text{ 因此 } A^2 = 2BC = 2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -2 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{同理 } A^{10} = \underbrace{(BC)(BC)\cdots(BC)}_{10\text{个}} = B \underbrace{(CB)(CB)\cdots(CB)}_{9\text{个}} C = B \cdot 2^9 \cdot C = 2^9 BC = 2^9 \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -2 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. 矩阵的转置

定义 2.7 已知 $m \times n$ 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, 将行变为列、列变为行所得到的

$n \times m$ 矩阵称为矩阵 A 的转置矩阵, 记为 A^T , 即

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

例如, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$, 则 $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$.

矩阵的转置有以下运算性质:

- (1) $(A^T)^T = A$;
- (2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- (3) $(kA)^T = kA^T$ (k 是常数);
- (4) $(AB)^T = B^T A^T$.

例 2.8 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 $(AB)^T$.

解 因为 $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$,

$$\text{所以 } (AB)^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{或者 } (AB)^T = B^T A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

定义 2.8 设 A 为 n 阶方阵, 若 $A^T = A$, 即 $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \cdots, n$), 则 A 称为对

称矩阵; 若 $A^T = -A$, 即 $a_{ij} = -a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则 A 称为反对称矩阵.

对称矩阵的特点: 它的元素以主对角线为对称轴对应相等.

反对称矩阵的特点: 以主对角线为对称轴的对应元素的绝对值相等, 符号相反, 且主对角线上各元素均为 0.

例如, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 分别为对称矩阵和反对称矩阵.

5. 方阵的行列式

定义 2.9 由 n 阶方阵 A 的元素构成的行列式(各元素的位置不变), 称方阵 A 的行列式, 记作 $|A|$ 或 $\det A$.

注意: 方阵与行列式是两个不同的概念. 方阵是一个矩阵, 行列式是一个数.

设 A, B 为 n 阶方阵, λ 为常数, 则有下列等式成立.

- (1) $|A^T| = |A|$;
- (2) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$;
- (3) $|AB| = |A| \cdot |B|$.

2.2 矩阵的逆

在数的乘法运算中, 若一个数 $a \neq 0$, 则有

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

其中, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ 为 a 的倒数(或称为 a 的逆). 在矩阵的乘法运算中, 单位矩阵 E 相当于数的乘法运算中的 1. 对于矩阵 A , 能否找到矩阵 B , 使 $AB = BA = E$ 成立呢? 这就是求逆矩阵的问题.

定义 2.10 设 A 为 n 阶方阵, 若存在 n 阶方阵 B , 使得

$$AB = BA = E, \quad (2.5)$$

则称 A 是可逆矩阵, 简称 A 可逆, 并称 B 是 A 的逆矩阵, 简称逆阵, 记为 $B = A^{-1}$.

例如, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $AB = BA = E$, 所以 B 是 A 的逆矩阵.

显然, 若 B 是 A 的逆矩阵, 则 A 也是 B 的逆矩阵.

注意: 如果 A 是可逆的, 则 A 的逆矩阵唯一. 实际上, 设 A 有两个逆矩阵 B, C , 即 $AB = BA = E, AC = CA = E$, 于是

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C.$$

例 2.9 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A 的逆矩阵.

解 设 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是 A 的逆矩阵, 则 $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 计算可得

$$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 于是有 } \begin{cases} 2a+c=1, \\ 2b+d=0, \\ -a=0, \\ -b=1, \end{cases} \text{ 可解得 } \begin{cases} a=0, \\ b=-1, \\ c=1, \\ d=2. \end{cases} \text{ 显然 } BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因此, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

注意: 在数的运算中, 并不是所有的数都有倒数, 只有不为零的数才有倒数. 类似地, 不是所有的方阵都可逆, 例如, 零矩阵就不可逆(因为任何矩阵与零矩阵相乘都等于零矩阵).

定义 2.11 设 n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则称

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为 A 的伴随矩阵, 简称伴随阵. 其中, $A_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 是 A 的行列式 $|A|$ 中元素 $a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 的代数余子式.

例 2.10 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A^* .

解 因为

$$\begin{aligned} A_{11} &= 2, A_{12} = 2, A_{13} = -4, \\ A_{21} &= -1, A_{22} = -1, A_{23} = 3, \\ A_{31} &= 1, A_{32} = -1, A_{33} = -1, \end{aligned}$$

所以 $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

利用行列式的按行(列)展开定理, 容易验证:

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

定理 2.1 设 A 为方阵, 则 A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$. 且当 A 可逆时, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.

证明 若 A 可逆, 则有 $AA^{-1} = E$, 因而 $|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |E| = 1$, 故 $|A| \neq 0$.

反之, 若 $|A| \neq 0$, 由伴随矩阵的性质, $AA^* = A^*A = |A|E$, 有 $A \frac{1}{|A|}A^* = A^* \frac{1}{|A|}A = E$.

所以, 按逆阵的定义可知 A 可逆, 且有 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.

按定理 2.1 来求逆矩阵时, 当矩阵的阶数比较高时, 计算量一般是非常大的. 如求五阶可逆矩阵的逆矩阵时, 需计算 25 个四阶行列式. 但求逆矩阵在理论研究中具有重要的作用. 在后面章节中将给出另一种求逆矩阵的方法.

推论 2.1 $|A| \neq 0$, 若 $AB = E$ 或者 $BA = E$, 则 B 就是 A 的逆矩阵, 即 $B = A^{-1}$.

证明 由于 $|A| \neq 0$, 所以 A^{-1} 存在. 若 $AB = E$, 得

$$B = EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E = A^{-1}.$$

同理, 若 $BA = E$, 也可推出 $B = A^{-1}$.

可见, 验证 B 是否为 A 的逆矩阵, 只需验证 $AB = E$ 或者 $BA = E$ 即可.

定义 2.12 当 $|A| = 0$ 时, 称 A 为奇异阵, 否则称非奇异阵. 显然, 可逆方阵就是非奇异方阵.

方阵的逆矩阵满足下列性质:

- (1) 若 A 可逆, 则 A^{-1} 亦可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
- (2) 若 A 可逆, 数 $\lambda \neq 0$, 则 λA 亦可逆, 且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$;
- (3) 若 A, B 为同阶方阵且均可逆, 则 AB 亦可逆, 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- (4) 若 A 可逆, 则 A^T 亦可逆, 且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
- (5) 若 A 可逆, 则有 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$;
- (6) 设 $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, 则 A 可逆的充分必要条件是 $a_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 且 $A^{-1} = \text{diag}(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1})$.

注意: $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.

例如, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} + B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 而 $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 显然, $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.

例 2.11 设方阵 B 满足 $B^2 = B$, $A = E + B$, 证明 A 是可逆矩阵, 且 $A^{-1} = \frac{1}{2}(3E - A)$.

$$\begin{aligned}\text{证明 } A \cdot \frac{1}{2}(3E - A) &= \frac{1}{2}(E + B)(3E - E - B) = \frac{1}{2}(E + B)(2E - B) \\ &= \frac{1}{2}(2E - B + 2B - B^2) = \frac{1}{2}(2E - B + 2B - B) = E.\end{aligned}$$

同理可得: $\frac{1}{2}(3E - A) \cdot A = E$. 所以 A 是可逆矩阵, 且 $A^{-1} = \frac{1}{2}(3E - A)$.

2.3 矩阵的初等变换

2.3.1 矩阵的分块

定义 2.13 用若干条纵线和横线把矩阵 A 分成许多个小矩阵, 每一个小矩阵称 A 的一个子块, 以子块为元素的矩阵称分块矩阵.

例如, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ 就是一个分块矩阵.

若记 $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A_{21} = (3 \ 2 \ 1 \ 4)$, $A_{22} = (0)$, 则 A 可表

示为 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$.

根据需要可以对矩阵做不同的划分, 上述矩阵亦可进行如下分块:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

若记 $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A_{13} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{21} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{23} =$

$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 可表示为 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$.

设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 常把矩阵按列分块:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n), \text{ 其中 } \alpha_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} (i = 1, 2, \cdots, n) \text{ 是}$$

一列的矩阵, 又称列向量.

或者把矩阵按行分块:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \text{ 其中 } \beta_i = (\beta_{i1} \quad \beta_{i2} \quad \cdots \quad \beta_{in}) (i = 1, 2, \cdots, m) \text{ 是}$$

一行的矩阵, 又称行向量.

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则类似, 下面分别加以说明.

1. 加法

设 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵, 且分块方法相同, 即

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}.$$

其中 A_{ij} 和 B_{ij} ($i = 1, 2, \cdots, s; j = 1, 2, \cdots, r$) 是同型的子块, 则

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1r} + B_{1r} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2r} + B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & A_{s2} + B_{s2} & \cdots & A_{sr} + B_{sr} \end{pmatrix},$$

即对应子块相加.

2. 数与矩阵相乘

设矩阵的分块矩阵形式为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},$$

则

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \lambda A_{s2} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix},$$

即用 λ 乘每个子块.

3. 两矩阵相乘

设矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数, 且 A 的列的分块与 B 的行的分块方法相同, 即

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rt} \end{pmatrix},$$

其中子块 A_{ik} 的列数等于子块 B_{kj} 的行数 ($i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, t; k = 1, 2, \dots, r$), 则

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{st} \end{pmatrix}.$$

其中 $C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{ir}B_{rj}$ ($i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, t$), 即以子块为元素按矩阵相乘的法则进行.

注意: 在分块矩阵乘法中, 要求矩阵 A 列的分法与矩阵 B 行的分法是一致的.

例 2.12 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 AB .

解 把 A, B 分块成 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, 其中

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O, A_{22} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4E_2,$$

$$B_{11} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O, B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O, B_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

$$\text{得 } AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & 4E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & O \\ O & E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{12} \\ O & 4E_2 \end{pmatrix}, \text{ 由于}$$

$$A_{11}B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 故 } AB = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. 转置

设 $m \times n$ 矩阵 A 的分块矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},$$

则

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & A_{2r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix},$$

其中 A_{ij}^T 是子块 A_{ij} 的转置矩阵 ($i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, r$), 即分块矩阵的转置是先对子块的位置转然后再对每个子块进行转置.

5. 分块对角阵

设 A 为 n 阶方阵, 若 A 的分块矩阵只有在主对角线上有非零的子块, 且非零子块都是方阵, 其余子块都为零矩阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 都是方阵, 那么 A 称分块对角阵, 也称准对角矩阵.

显然, 分块对角矩阵的行列式具有下述性质:

$$|A| = |A_1| |A_2| \cdots |A_s|.$$

对于两个有相同分块的准对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_s \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & O & \cdots & O \\ O & B_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & B_s \end{pmatrix},$$

有

$$A \pm B = \begin{pmatrix} A_1 \pm B_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 \pm B_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_s \pm B_s \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 B_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_s B_s \end{pmatrix}.$$

2.3.2 分块矩阵的逆矩阵

设分块对角阵 $A = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_s \end{pmatrix}$, 其中 $A_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 是可逆的, 则由分块

对角阵的乘法, 有 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O & \cdots & O \\ O & A_2^{-1} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_s^{-1} \end{pmatrix}$.

例 2.13 求下列矩阵的逆矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

解 采用分块对角阵 $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$, 其中 $A_1 = (5)$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, 则

$$A_1^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right), A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 故 } A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3.3 矩阵的初等变换

定义 2.14 对一个矩阵进行下列三种变换, 称为矩阵的初等行(列)变换.

- (1) 对换变换: 交换两行(列)[交换 i, j 两行(列), 记作 $r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$].
- (2) 数乘变换: 以数 $k (k \neq 0)$ 乘某一行(列)中的所有元素[第 i 行(列)乘 k , 记作 $kr_i (kc_i)$].
- (3) 倍加变换: 把某一行(列)所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去[第 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列)上, 记作 $r_i + kr_j (c_i + kc_j)$].

矩阵的初等行变换与初等列变换, 统称矩阵的初等变换.

例如,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3 + c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

显然, 三种初等变换都可逆, 且其逆变换是同一类型的初等变换: 变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换就是自身; $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \times \left(\frac{1}{k}\right)$; 变换 $r_i + kr_j$ 的逆变换为 $r_i + (-k)r_j$.

定义 2.15 如果矩阵 A 经有限次初等变换化成矩阵 B , 就称矩阵 A 与矩阵 B 等价, 记作 $A \cong B$ 或记作 $A \rightarrow B$.

矩阵的等价有以下性质.

- (1) 反身性: $A \cong A$.
- (2) 对称性: 若 $A \cong B$, 则 $B \cong A$.
- (3) 传递性: 若 $A \cong B$, $B \cong C$, 则 $A \cong C$.

对矩阵进行初等变换的一个最主要目的就是对矩阵进行化简. 下面介绍几种化简后的形式及化简方法.

定义 2.16 已知非零矩阵 A , 若它满足下述两个条件, 则称矩阵 A 为行阶梯形矩阵:

- (1) 元素全为零的行(如果存在的话)在矩阵的最下方;
- (2) 各非零行的非零首元(即第一个不为零的元素)的列标随着行标的递增而严格增大.

对于这样的矩阵, 可画出一条阶梯线, 线的下方都是零, 每个台阶只有一行, 台阶数即是非零行数.

例如, 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为行阶梯形矩阵.

利用初等行变换可以把矩阵化为行阶梯形矩阵.

例 2.14 将矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ 化为行阶梯形矩阵.

解 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 + 2r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow[r_4 + 3r_2]{\frac{1}{2}r_2, r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{r_4 - 5r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

继续进行行变换, 还可以得到更为简单的形式.

定义 2.17 对于行阶梯形矩阵, 若它满足下述两个条件, 则称该矩阵为行最简形矩阵:

- (1) 各非零行的非零首元均为 1;
- (2) 非零首元所在的列除了非零首元 1 以外, 其他元素都为 0.

例如, 对例 2.14 中的矩阵 A 继续进行初等行变换, 可得到

$$A \xrightarrow[r_1 - r_2]{r_1 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

若再对矩阵 A 进行初等列变换, 其还可以进一步化简.

$$\begin{aligned}
A & \xrightarrow[c_4 + 2c_1]{c_2 + 2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_4 - \frac{1}{2}c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 \leftrightarrow c_5]{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} E_3 & O \\ O & O \end{pmatrix} = B.
\end{aligned}$$

矩阵 B 的左上角为一个单位矩阵 E_3 , 其他各分块矩阵均是零矩阵, 则称矩阵 B 为矩阵 A 的等价标准形.

定理 2.2 任意一个 $m \times n$ 矩阵 A 都与一个形如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

的矩阵等价, 则此矩阵称矩阵 A 的标准形. 其中 r 为 1 的个数, E_r 为 r 阶单位矩阵.

注意: 标准形矩阵中元素 1 的个数可以是零, 即元素 1 的个数为零的矩阵为零矩阵.

定理 2.3 任何一个矩阵 A 总可以经过有限次初等行变换化为行阶梯形矩阵, 并进一步化为行最简形矩阵.

定理 2.4 任何一个矩阵都有等价标准形, 当且仅当矩阵 A 与 B 有相同的等价标准形时, 矩阵 A 与 B 等价.

注意: 与矩阵 A 等价的行阶梯形矩阵和行最简形矩阵不是唯一的, 但矩阵 A 的等价标准形是唯一的.

例 2.15 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 求 A 的等价标准形.

$$\begin{aligned} \text{解 } A &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4 + c_1]{c_3 - 2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4 - 2c_2]{c_3 + c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{c_4 + 2c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.3.4 初等矩阵

定义 2.18 将单位矩阵作一次初等变换得到的矩阵称初等矩阵, 简称初等阵.

三种初等变换对应着如下三种初等阵.

(1) 交换单位矩阵 E 的第 i, j 行(或列), 得

$$P(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \text{ 行} \\ \\ \\ \leftarrow j \text{ 行} \end{matrix}.$$

(2) 单位矩阵 E 的第 i 行(或列) 乘 k , 得

$$P(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & k & \\ & & & & 1 & \ddots \\ & & & & & \ddots & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i \text{ 行.}$$

(3) 单位矩阵 E 的第 i 行乘 k 加到第 j 行(或第 j 列乘 k 加到第 i 列), 得

$$P(j, i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & k & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \text{ 行} \end{matrix}$$

由初等变换可逆, 可知初等矩阵可逆, 且此初等变换的逆变换也就对应着初等矩阵的逆阵, 它们的逆矩阵还是初等矩阵.

$$P(i, j)^{-1} = P(i, j), P^{-1}(i(k)) = P(i(k^{-1})), P^{-1}(j, i(k)) = P(j, i(-k)).$$

定理 2.5 对一个 $m \times n$ 矩阵 A 作一次初等行变换相当于在 A 的左边乘上相应的 m 阶初等方阵; 对 A 作一次初等列变换相当于在 A 的右边乘上相应的 n 阶初等方阵.

证明 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$

(1) $P(i, j)$ 是交换单位矩阵 E 的第 i, j 行(或列) 得到的, 则

$$P(i, j)A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow j \text{ 行} \\ \\ \end{matrix},$$

$$AP(i, j) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 $i \text{ 列} \qquad j \text{ 列}$

即用 m 阶矩阵 $P(i, j)$ 左乘 A , 相当于对矩阵施行第一种初等行变换: 交换 A 的第 i 行和第 j 行. 用 n 阶矩阵 $P(i, j)$ 右乘 A , 相当于对矩阵施行第一种初等列变换: 交换 A 的第 i 列和第 j 列.

(2) $P(i(k))$ 是由单位矩阵 E 的第 i 行(或列)乘 k 得到的, 则

$$P(i(k))A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow i \text{ 行},$$

$$AP(i(k)) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & ka_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$\uparrow$
 $i \text{ 列}$

即用 m 阶矩阵 $P(i(k))$ 左乘 A , 相当于对矩阵施行第二种初等行变换: 用数 k 乘 A 的第 i 行. 用 n 阶矩阵 $P(i(k))$ 右乘 A , 相当于对矩阵施行第二种初等列变换: 用数 k 乘 A 的第 i 列.

(3) $P(j, i(k))$ 是由单位矩阵 E 的第 i 行乘 k 加到第 j 行(或第 j 列乘 k 加到第 i 列)得到的, 则

$$P(j, i(k))A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} + a_{j1} & ka_{i2} + a_{j2} & \cdots & ka_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow j \text{ 行} \end{matrix},$$

$$AP(j, i(k)) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} + ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} + ka_{mj} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$\begin{matrix} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & i \text{ 列} & & j \text{ 列} & & \end{matrix}$

即用 m 阶矩阵 $P(j, i(k))$ 左乘 A , 相当于对矩阵施行第三种初等行变换: 把 A 的第 i 行元素的 k 倍加到第 j 行对应的元素上. 用 n 阶矩阵 $P(j, i(k))$ 右乘 A , 相当于对矩阵施行第三种初等列变换: 把 A 的第 j 列元素的 k 倍加到第 i 列对应的元素上.

因此, 对矩阵 A 施行任一种初等行(列)变换, 就相当于在矩阵的左(右)边乘上一个相应的初等矩阵.

推论 2.2 矩阵 A 和矩阵 B 等价的充要条件是存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s, Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$, 使得

$$P_1 P_2 \cdots P_s B Q_1 Q_2 \cdots Q_t = A.$$

2.4 矩阵的秩

矩阵的秩是反映矩阵固有特性的一个重要概念, 对矩阵理论的研究和应用有着十分重要的作用.

2.4.1 矩阵的子式与矩阵的秩

定义 2.19 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 任意选取 A 的 k 行和 k 列 ($1 \leq k \leq \min(m, n)$), 位于这些行和列相交处的 $k \times k$ 个元素按原来的顺序组成一个 k 阶方阵, 该方阵对应的 k 阶行列式称矩阵 A 的一个 k 阶子式.

例如, 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$, 取定 A 的第 3 行和第 1 列, 相交处的元素可构成一阶子式

$|7| = 7$; 取定 A 的第 1、3 两行和第 2、3 两列, 这些行和列相交处的 4 个元素按原来的相应位置就可构成 A 的一个二阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} = -18 + 24 = 6.$$

显然, 该矩阵 A 的二阶子式有 9 个. 一般地, 一个 $m \times n$ 矩阵的 k 阶子式共有 $C_m^k C_n^k$ 个.

定义 2.20 若矩阵 A 中存在一个 r 阶子式不等于零, 而所有 $r+1$ 阶子式(存在的话)

全等于零, 则称矩阵 A 的秩为 r , 记为 $r(A) = r$.

规定: 零矩阵的秩为 0.

例 2.16 求矩阵 A 的秩, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

解 显然 A 中有一阶子式不等于零. 在 A 中, 存在一个二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq$

0. 又 A 的三阶子式只有一个 $|A|$, 且 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$, 故 $r(A) = 2$.

注意: 从本例可以看出, 利用定义求矩阵 A 的秩, 需确定多个子式的值, 计算过程是比较麻烦的.

例 2.17 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 的秩为 3, 求 a 的值.

解 由于 $r(A) = 3$, 则 $|A| = 0$, 于是

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} \\ &= (a+3)(a-1)^3 = 0. \end{aligned}$$

可解得 $a = -3$ 或 $a = 1$.

当 $a = 1$ 时, $r(A) = 1$; 当 $a = -3$ 时, 存在一个三阶子式 $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$.

故当且仅当 $a = -3$ 时, $r(A) = 3$.

由秩的定义和行列式的性质可知, $m \times n$ 矩阵 A 的秩有下述性质:

- (1) $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$;
- (2) $r(A) = r(A^T)$;
- (3) $r(kA) = r(A)$, k 为非零常数.

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是可逆矩阵, 即 $|A| \neq 0$, A 的不等于零的子式的阶数为 n , 所以 $r(A) = n$. 反之, 若 n 阶矩阵 A 的秩为 n , 则 A 的 n 阶子式不等于零, 即 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆.

定理 2.6 设 A 为 n 阶方阵, 则 $r(A) = n$ 的充要条件是 A 为可逆矩阵.

可以看出, 对于 n 阶方阵 A , $|A| = 0$ 的充要条件是 $r(A) < n$.

由行列式的性质可知, 在 A 中, 当所有 $r+1$ 阶子式都为 0 时, 所有高于 $r+1$ 阶的子式也全为 0, 因此, 矩阵 A 的秩 $r(A)$ 就是 A 的非零子式的最高阶数. 若 $r(A)=r$, 则 A 一定存在一个 r 阶非零子式, 称 A 的**最高阶非零子式**. 显然, A 的最高阶非零子式可能不止一个.

例 2.18 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩.

解 矩阵 A 是一个行阶梯形矩阵, 其中非零行只有三行, 故可知 A 的四阶子式必定全为零.

又 A 存在一个三阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 60 \neq 0$, 故 $r(A) = 3$.

从本例中可以看出: 一个行阶梯形矩阵的秩一定等于它的非零行的个数.

设矩阵 A 是一个 $s \times n$ 矩阵, 显然, 有 $r(A) \leq \min(s, n)$. 当 $r(A) = \min(s, n)$ 时, 称 A 为**满秩矩阵**; 否则称 A 为**降秩矩阵**.

利用定义计算矩阵的秩, 需要由高阶到低阶考虑矩阵的子式, 当矩阵的行数与列数较多时, 是非常麻烦的. 但由“一个行阶梯形矩阵的秩一定等于它的非零行的个数”这一结论可知, 行阶梯形矩阵的秩是比较好判断的. 而矩阵都可以经过初等行变换化为行阶梯形矩阵, 因而可考虑借助初等变换求矩阵的秩.

2.4.2 利用初等变换求矩阵的秩

定理 2.7 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩.

证明 设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 这里仅证明初等行变换的情况.

(1) 当对 A 施以交换两行的变换时, 变换后的矩阵的任一子式和原矩阵对应位置的子式相比, 最多只可能是行的顺序的不同, 而这只会改变行列式的符号. 子式或同为零, 或同不为零, 所以矩阵的秩不会改变.

(2) 当对 A 施以用非零数 k 乘某一行的变换时, 变换后的矩阵的任一子式和原矩阵对应位置的子式相比, 最多只可能是某行乘以非零数, 而这只会改变行列式的倍数. 子式或同为零, 或同不为零, 所以矩阵的秩不会改变.

(3) 当对 A 施以第三种初等行变换时, 不妨设把 A 的第 2 行的 k 倍加到第 1 行上, 得到矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & \cdots & a_{1n} + ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

假设 $r(A)=r$, 若 B 中没有大于 r 阶的子式, 易知 $r(B) \leq r = r(A)$. 若 B 中有大于 r 阶

的子式, 对任意一个 $r+1$ 阶子式, 不妨记为 $|B_{r+1}|$, 分如下两种情况讨论.

(i) 如果 $|B_{r+1}|$ 不包含 B 的第 1 行元素, 则它也是原矩阵 A 的 $r+1$ 阶子式, 因 $r(A) = r$, 故 $|B_{r+1}| = 0$.

(ii) 如果 $|B_{r+1}|$ 含有 B 的第 1 行元素, 则

$$\begin{aligned}
 |B_{r+1}| &= \begin{vmatrix} a_{1j_1} + ka_{2j_1} & a_{1j_2} + ka_{2j_2} & \cdots & a_{1j_{r+1}} + ka_{2j_{r+1}} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_{r+1}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i_{r+1}j_1} & a_{i_{r+1}j_2} & \cdots & a_{i_{r+1}j_{r+1}} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_{r+1}} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_{r+1}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i_{r+1}j_1} & a_{i_{r+1}j_2} & \cdots & a_{i_{r+1}j_{r+1}} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_{r+1}} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_{r+1}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i_{r+1}j_1} & a_{i_{r+1}j_2} & \cdots & a_{i_{r+1}j_{r+1}} \end{vmatrix} \\
 &= 0 + 0 = 0.
 \end{aligned}$$

因此 $r(B) \leq r = r(A)$.

同理, 根据初等变换的可逆性, 矩阵 B 也可以通过第三种初等行变换化为矩阵 A , 故可得 $r(A) \leq r(B)$. 于是 $r(A) = r(B)$, 即初等行变换不改变矩阵的秩.

初等列变换也有同样的结论, 读者可自行证明.

定理 2.7 表明两个等价矩阵的秩必然相等. 若矩阵 A 的标准形为 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 显然 $r(A) = r$. 由此可以得到求矩阵秩的另一种方法, 即利用矩阵的初等行变换将 A 化为行阶梯形矩阵, 行阶梯形矩阵中非零行数就是矩阵 A 的秩.

例 2.19 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, 求 A 的秩.

解 对 A 施以初等行变换化为行阶梯形矩阵, 即

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & 2 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 11r_1 \\ r_4 - 2r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 12 & 16 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\begin{matrix} r_3 - 4r_2 \\ r_4 + r_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

变换后的行阶梯形矩阵有两个非零行, 所以 $r(A) = 2$.

2.4.3 利用初等变换求矩阵的逆

本章的第2节中给出了当矩阵 A 可逆时, 计算逆矩阵 A^{-1} 的公式 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$. 若按这个公式来求逆矩阵, 当矩阵的阶数比较高时, 计算量一般是非常大的. 下面介绍另一种求逆矩阵的简便有效的方法, 即利用初等变换求矩阵的逆.

定理 2.8 n 阶矩阵 A 可逆的充要条件是存在 n 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_t$, 使

$$A = P_1 P_2 \cdots P_t.$$

证明 设 A 可逆, 则 $A \cong E$. 由矩阵等价的对称性知 $E \cong A$, 故 E 经有限次初等变换可化为 A , 也就是存在 n 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_t$, 使 $P_1 P_2 \cdots P_t E P_{t+1} \cdots P_l = A$, 即 $A = P_1 P_2 \cdots P_l$.

反之, 由于每一个初等矩阵均为可逆阵, 因此 A 也为可逆阵.

推论 2.3 两个 $m \times n$ 矩阵 A, B 等价的充要条件是存在 m 阶可逆方阵 P 与 n 阶可逆方阵 Q , 使 $PAQ = B$.

利用初等变换求矩阵的逆的方法如下.

若 A 可逆, 则根据定理 2.8, 存在初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_t$, 使得

$$A = P_1 P_2 \cdots P_t,$$

上式两边依次左乘初等矩阵 $P_1^{-1}, P_2^{-1}, \dots, P_t^{-1}$ 有

$$P_t^{-1} P_{t-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A = E,$$

再右乘 A^{-1} 得

$$P_t^{-1} P_{t-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E = A^{-1}.$$

这表明对 A 施行一系列初等行变换后得到单位矩阵 E , 对 E 依次施行与对 A 同样的初等行变换, 即得 A^{-1} . 从而

$$P_t^{-1} P_{t-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} (A \mid E) = (P_t^{-1} P_{t-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A \mid P_t^{-1} P_{t-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E) = (E \mid A^{-1}),$$

即对矩阵 $(A \mid E)$ 施行初等行变换, 把 A 变成 E 时, 原来的 E 就变成 A^{-1} .

同理, 对矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$ 施行初等列变换, 把 A 变成 E 时, 原来的 E 就变成 A^{-1} , 即

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 2.20 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

解 $(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 + r_2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_1 - 2r_3]{r_2 - 5r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[-r_3]{-\frac{1}{2}r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) = (E : A^{-1}).$$

$$\text{所以 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

注意:

(1) 在用初等行变换求逆矩阵的实际计算中, 若对方阵 A 施行初等行变换的过程中出现了零行, 则表明 A 不可逆, 变换即可终止.

(2) 利用分块矩阵 $(A : E)$ 求逆矩阵时, 只能用初等行变换, 而不能用初等列变换.

习 题 2

1. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $4A + 2B$.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, 求 AB 和 BA .

3. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^4 和 A^n .

4. 设 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, 求 $A^n (n \geq 2)$.

5. 证明: 设 A 和 B 为两个 n 阶对称矩阵, 则 AB 是对称阵的充要条件是 $AB = BA$.

6. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, 求 $A^T B$.

7. 设 A 是 n 阶方阵, 满足 $AA^T = E$, 且 $|A| = -1$, 求 $|A + E|$.

8. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

9. 已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

10. 对角阵为 $A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$, $d_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 求 A^{-1} .

11. 设 A 与 C 分别是 r 阶和 s 阶可逆矩阵, 求分块矩阵 $X = \begin{pmatrix} O & A \\ C & O \end{pmatrix}$ 和 $Y = \begin{pmatrix} O & A \\ C & B \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

12. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 求 $(A^*)^{-1}$.

13. 已知 $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $|A|$ 和 A^{-1} (提示: $|A^*| = |A|^{n-1}$).

14. 设 $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X , 使 $AXB = C$.

15. 设 A 和 B 均为 n 阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 试证明: $r(A) < n, r(B) < n$.

16. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 若 $AB = E$, 试证明: $r(B) = m$.

17. 设方阵 A 满足 $A^2 - 2A - 4E = O$, 证明 $A + E$ 是可逆阵, 并求 $(A + E)^{-1}$.

18. 求矩阵 X , 使 $AX = B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

19. 求 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2001} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2000}$.